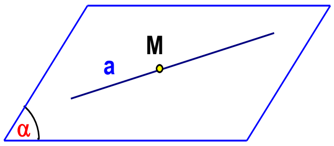
HỆ THỐNG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1/ C/m điểm thuộc mặt phẳng :

- *Phương pháp* :

Để chứng minh điểm M $\in$ mp α ta chứng minh :

$$\begin{cases} M \in \text{Đường thẳng a} \\ \text{Đường thẳng a} \subset mp\alpha \end{cases} \Rightarrow M \in mp\alpha$$



2/ Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng :

- *Phương pháp* : Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mp α ta thực hiện các bước sau :

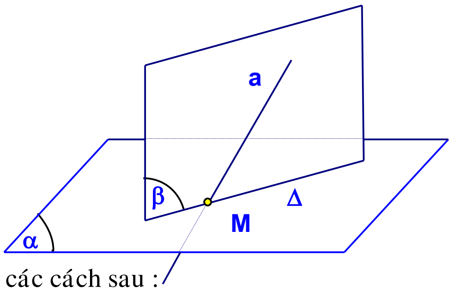
Bước 1 : Chọn mặt phẳng phụ β chứa đường thẳng a

(Chú ý : Mặt phẳng α và β để xác định giao tuyến)

Bước 2 : Tìm giao tuyến Δ của α và β

Bước 3 : Gọi I = giao điểm của a và Δ . Chứng minh I là giao điểm của đường thẳng a và mp α

(Chứng minh : I vừa thuộc đường thẳng a vừa thuộc mp α)



3/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :

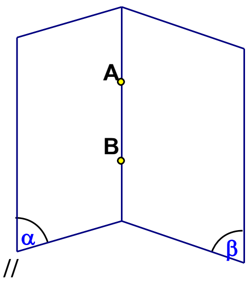
- *Phương pháp* : Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng α và β ta dùng các cách sau :

C1 : Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng

$$\begin{cases} A, B \in mp\,\alpha \\ A, B \in mp\beta \end{cases} \Rightarrow \text{Đường thẳng } AB = mp\alpha \cap mp\beta.$$

C2 : Tìm một điểm chung của hai mặt phẳng và phương của giao tuyến

(Giao tuyến // hoặc vuông góc với một đường thẳng cố định cho trước)



Chú ý *:* Khi tìm phương của giao tuyến ta cần quan tâm đến các định lý :

- Nếu a // (P) thì a // với giao tuyến d của mp(P) và mp(Q) đi qua a
- Hai mặt phẳng song song bị cắt bởi một mặt phẳng thứ ba thì các giao tuyến này //
- Hai mặt phẳng cắt nhau cùng // với một đường thẳng thì giao tuyến của hai mạt phẳng này // với đường thẳng đó .

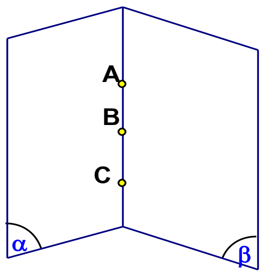
4/ Chứng minh 3 điểm thẳng hàng :

- *Phương pháp* : Để chứng minh 3 điểm : A, B, C thẳng hàng

Ta chứng minh 3 điểm này cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt α và β

$\Rightarrow$ A, B, C thuộc giao tuyến của α và β nên thẳng hàng

▷ Thường CM như sau: $\left.\begin{matrix} (\alpha) \cap (\beta) = AB \\ C \in (\alpha) \cap (\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow C \in AB$, nên A, B, C thẳng hàng



5/ Chứng minh 3 đường thẳng đồng quy :

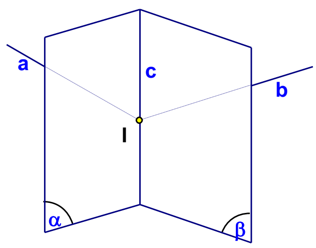
- *Phương pháp* : Để chứng minh 3 đường thẳng : a, b, c đồng quy ta thực hiện các bước sau :

Bước 1 : Đặt I = giao điểm của a và b.

Bước 2 : Tìm hai mặt phẳng α và β nào đó sao cho c = giao tuyến của α và β .

Bước 3 : Chứng minh : $\begin{cases} I \in mp\alpha \\ I \in mp\beta \end{cases} \Rightarrow I \in \text{đường thẳng c}$

$\Rightarrow$ 3 đường thẳng a, b, c cùng đi qua I nên đồng qui.



- *Cách khác* :

Dùng định lý : "*Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến này // hoặc đồng quy*'' Như vậy nếu chúng ta *loại trừ được khả năng //* thì chúng sẽ đồng quy.

6/ Chứng minh giao tuyến hay (đường thẳng) cố định :

- *Phương pháp* : Ta chứng minh đường thẳng hay giao tuyến là giao của hai mặt phẳng cố định

7/ Chứng minh hai đường thẳng chéo nhau :

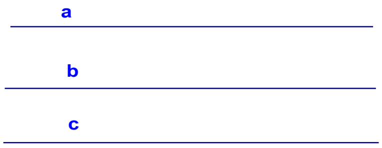
- *Phương pháp* : Để chứng minh hai đường thẳng chéo nhau ta chứng minh chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng (Thường dùng phương pháp chứng minh bằng phản chứng: Giả sử hai đường thẳng đó không chéo nhau. Suy luận để suy ra điều vô lý. Vậy hai đường thẳng đó phải // với nhau)

8/ Chứng minh hai đường thẳng //.

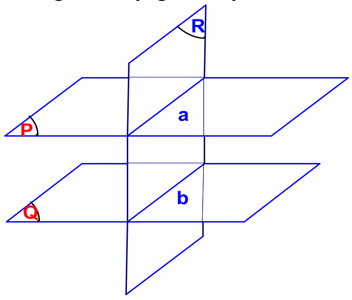
C1 : Dùng các **quan hệ song song** đã biết **trong mặt phẳng**.

C2 : Chứng minh chúng phân biệt và cùng // với một đường thẳng thứ ba .

a, b phân biệt & a // c, a // c $\Rightarrow$ a // b



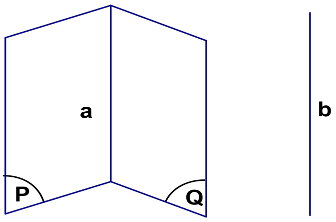
C3 : Dùng định lý giao tuyến:



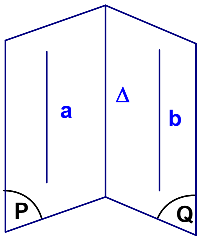
$(P)\,//\,(Q),\ (R)\cap(P)=a,\ (R)\cap(Q)=b \Rightarrow$ a // b

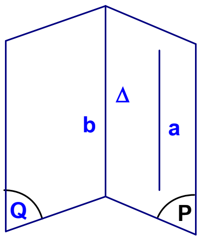
C4 : Dùng định lý giao tuyến:

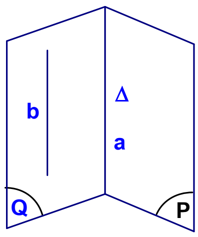
$(P)\,//$ a, $(Q)\,//$ a, $(P)\cap(Q)=a \Rightarrow$ a // b



C5 : Dùng định lý giao tuyến:

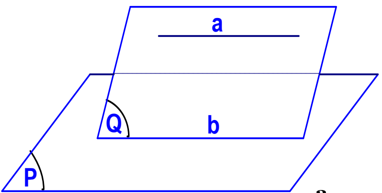






a // b, (P) qua a, (Q) qua b, $(P)\cap(Q)=\Delta$
$\Rightarrow \Delta$ // a, Δ // b hoặc Δ trùng với a hoặc b

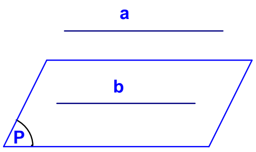
C6 : Dùng định lý giao tuyến:



a // (P), (Q) qua a, $(P)\cap(Q)=b \Rightarrow$ a // b

9/ <u>Chứng minh đường thẳng // với mặt phẳng</u>.

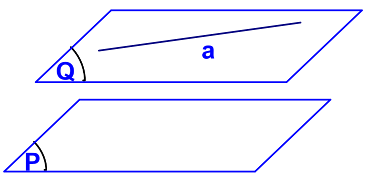
C1 : CM đường thẳng không nằm trong mặt phẳng và // với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng.



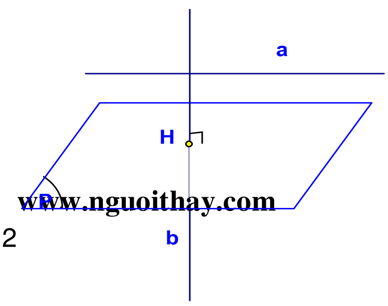
$a\not\subset(P),\ b\subset(P),$ a // b , $\Rightarrow a\ //(P)$

C2 : Dùng hệ quả:

.



(P) // (Q), $a\subset(Q)\Rightarrow a\ //(P)$

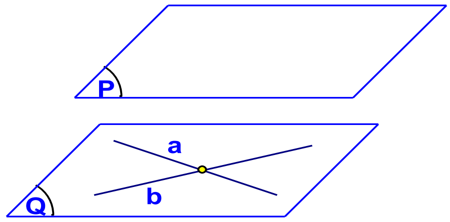


C3 : Dùng hệ quả:

$a\not\subset(P),\ (P)\perp b,\ a\perp b\ \Rightarrow a\ //(P)$

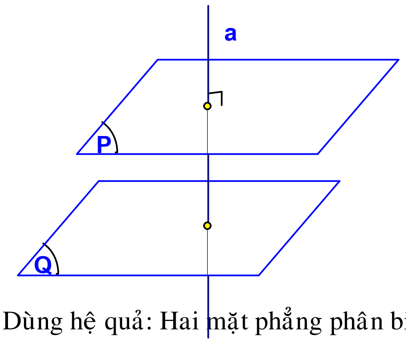
10/ Chứng minh hai mặt phẳng song song.

C1 : Chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau // với mặt phẳng kia.



$$a, b \subset (Q)\text{, a cắt b, a // (P) và b // (P)} \Rightarrow (P)\ //(Q)$$

C2 : Chứng minh chúng phân biệt và cùng vuông góc với một đường thẳng .



$$(P),\ (Q)\text{ phân biệt, } (P) \perp a,\ (Q) \perp a \Rightarrow (P)\ //(Q)$$

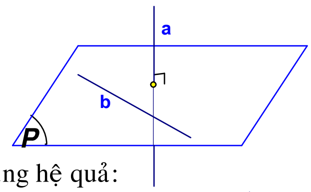
C3 : Dùng hệ quả: Hai mặt phẳng phân biệt và cùng // với một mặt phẳng thứ ba thì // với nhau .

11/ Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

C1 : Dùng các **quan hệ vuông góc** đã biết **trong mặt phẳng**.

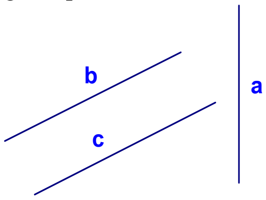
C2 : $a \perp b \Leftrightarrow \text{góc}\,(a;b) = 90^o$.

C3: Dùng hệ quả:



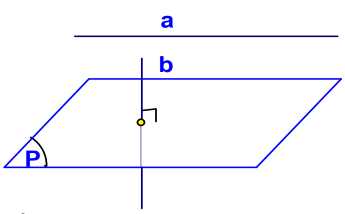
$$\left.\begin{matrix} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp b \Rightarrow (P)\ //(Q)$$

C4: Dùng hệ quả:

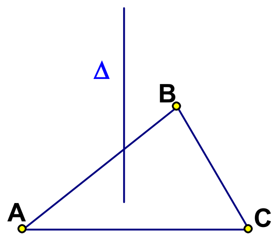


$$b\ //\ c\ ,\ a \perp b\ \Rightarrow a \perp c$$

C5 : Dùng hệ quả:



$$\left.\begin{matrix} a\ song\ song\ (P) \\ b \perp (P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp b \Rightarrow (P)\ //(Q)$$



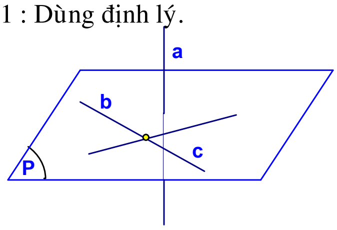
C6 : Sử dụng định lí ba đường vuông góc.

C7: Dùng hệ quả:

$$\left.\begin{matrix} \Delta \perp AB \\ \Delta \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta \perp BC$$

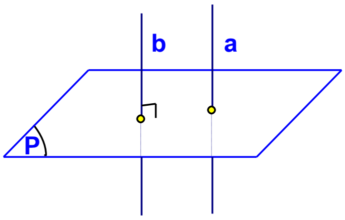
12/ Chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng.

C1 : Dùng định lý.



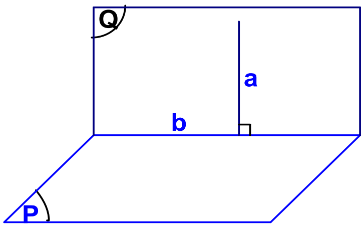
$$b\ ,\ c\ \text{cắt nhau}\ ,\ b,c \subset (P),\ a \perp b,\ a \perp c \Rightarrow a \perp (P)$$

C2 : Dùng hệ quả:



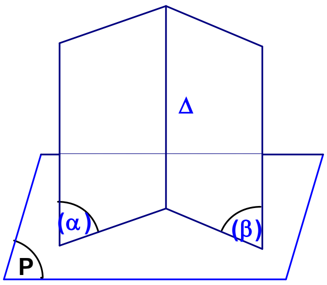
$$a\,//\,b\,,\;\; b\perp(P)\Rightarrow a\perp(P)$$

C3 : Dùng hệ quả:



$$\left.\begin{matrix}(P)\cap(Q)=b\\ a\subset(Q),a\perp b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp(P)$$

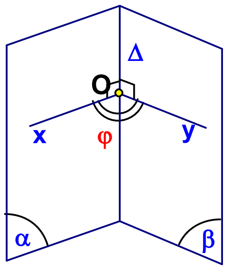
C4 : Dùng hệ quả:



$$\left.\begin{matrix}(\alpha)\cap(\beta)=\Delta\\ (\alpha)\perp(P),(\beta)\perp(P)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \Delta\perp(P)$$

13/ <u>**Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc**</u>.

C1 : Chứng minh góc giữa chúng là một vuông.



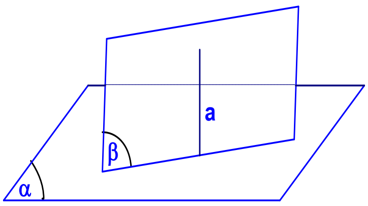
- $(\alpha)\cap(\beta)=\Delta,\ Ox\subset(\alpha),Ox\perp\Delta,\ Oy\subset(\beta),Oy\perp\Delta$

Khi đó:

góc $((\alpha);(\beta))=$ góc $(Ox;Oy)=xOy=\varphi:0\le\varphi\le 90^o$

- $(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow\varphi=90^o$

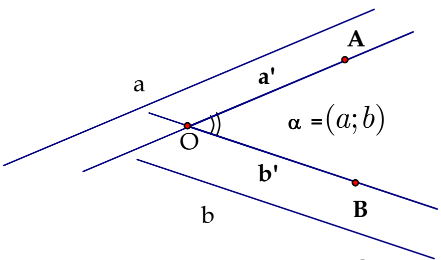
C2 : Dùng hệ quả:



$$\left.\begin{matrix}a\subset(\beta)\\ a\perp(\alpha)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$$

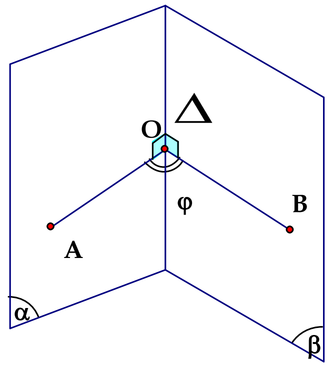
◈ <u>***CÁCH XÁC ĐỊNH GÓC***</u>

1/ <u>**Góc của hai đường thẳng**</u>



- Chọn điểm O tuỳ ý.
- Dựng qua O : a’ // a; b’ // b .
- Góc (a,b) = góc (a’,b’) = AOB
- Thường chọn điểm O $\in$ a hoặc O $\in$ b

2. <u>**Góc của hai mặt phẳng**</u>



- Chọn điểm O thuộc giao tuyến của α và β.
- Dựng qua O : $\begin{cases} OA \subset (\alpha) \\ OA \perp \Delta \end{cases}$ và $\begin{cases} OB \subset (\beta) \\ OB \perp \Delta \end{cases}$
- Góc (α, β) = Góc (OA, OB) = $AOB = \varphi$

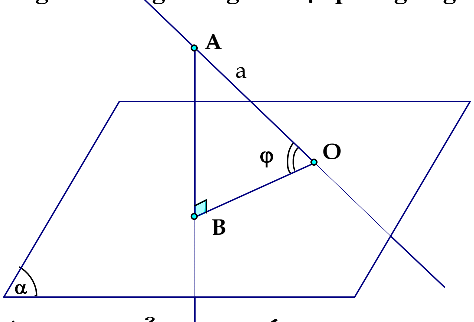
Chú ý:

$* \ 0 \le \varphi \le 90^o$

$*$ Nếu $\varphi > 90^o$ thì chọn góc $(\alpha;\beta) = 180^o - \varphi$

3. Góc của đường thẳng và mặt phẳng

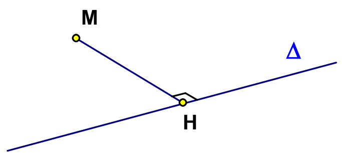
▷ **Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng**



- Chọn điểm A thuộc đường thẳng a.
- Dựng qua $AB \perp (\alpha)$ tại B.
- Dựng giao điểm O của a và α nếu chưa có.
  (OB là hình chiếu của a trên mặt phẳng (α))
- Khi đó: Góc $(a;(\alpha))$ = Góc (OA, OB) = $AOB = \varphi$.

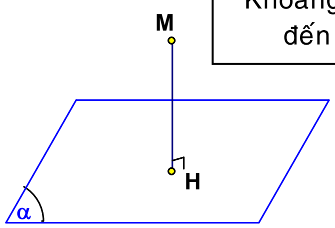
◈ KHOẢNG CÁCH

Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng



D□ng MH ⊥ Δ : d(M,Δ) = MH

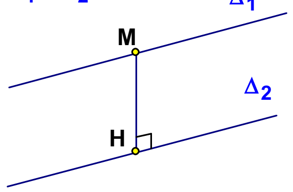
Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng



D□ng: MH ⊥ (α), H thu□c (α) ta c□: d(M,(α)) = MH

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

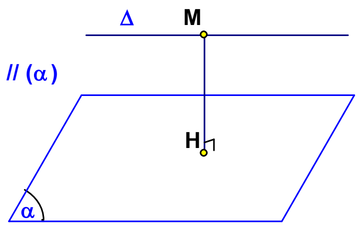
$\Delta_1 // \Delta_2$



Ch□n □i□m M tr□n Δ_1, d□ng MH ⊥ Δ_2
(H thu□c Δ_2) ta c□ d(Δ_1,Δ_2) = MH

Khoảng cách giữa mặt phẳng và đường thẳng //

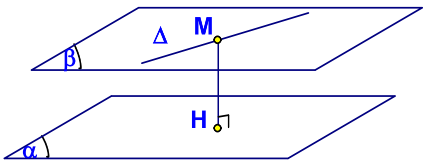
Δ // (α)



Ch□n □i□m M thu□c Δ, d□ng MH ⊥ Δ
(H thu□c (α)), ta c□ d(Δ,(α)) = MH

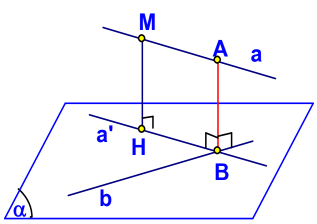
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

(α) // (β), Δ ch□a trong (α)



Ta c□: d((α),(β)) = d(Δ,(α)) = MH
(M thu□c Δ, MH ⊥ (α), H thu□c α)

Khoảng cách giữa hai Đường thẳng chéo nhau



• a và b ch□o nhau

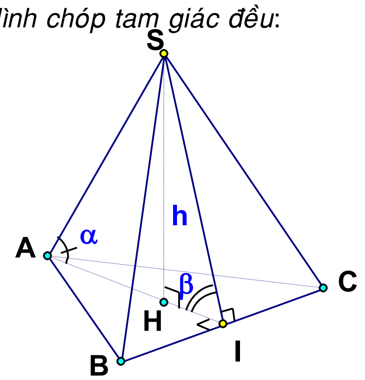
- D□ng mđt ph□ng (α) ch□a b & (α) // a
- D□ng MH ⊥(α), M thu□c a, H thu□c (α)
- D□ng a' trong mđt ph□ng (α), a' // a
□□□ng th□ng a' c□t □□□ng th□ng b t□i B
- D□ng Δ qua B và // MH, Δ c□t a t□i A

Khi □□: d(a,b) = d(a,(α))
= d(M,(α)) = MH = AB

◈ *HÌNH VẼ MỘT SỐ HÌNH CHÓP ĐẶT BIỆT*

1/ Hình chóp tam giác đều

▷ *Hình chóp tam giác đều*:



∗ Đáy là tam giác đều
∗ Các mặt bên là những tam giác cân

▷ Đặc biệt: *Hình tứ diện đều* có:
∗ Đáy là tam giác đều
∗ Các mặt bên là những tam giác đều

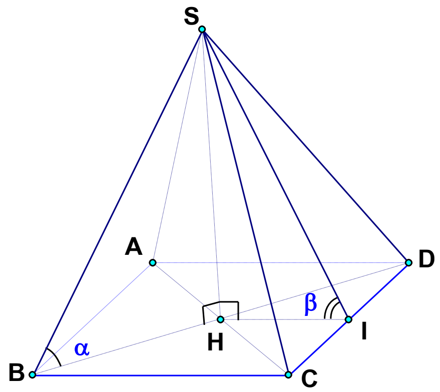
▷ Cách vẽ:
∗ Vẽ đáy ABC ∗ Vẽ trung tuyến AI
∗ Dựng trọng tâm H ∗ Vẽ SH $\perp$ (ABC)

- Ta có:
∗ SH là chiều cao của hình chóp

∗ Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là: $SAH = \alpha$.

∗ Góc mặt bên và mặt đáy là: $SIH = \beta$

2/ Hình chóp tứ giác đều



▷ *Hình chóp tứ giác đều*:
∗ Đáy là hình vuông
∗ Các mặt bên là những tam giác cân

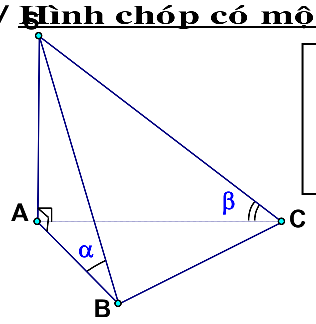
▷ Cách vẽ:
∗ Vẽ đáy ABCD
∗ Dựng giao điểm H của hai đường chéo AC & BD
∗ Vẽ SH $\perp$ (ABCD)

- Ta có:
∗ SH là chiều cao của hình chóp

∗ Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là: $SAH = \alpha$.

∗ Góc mặt bên và mặt đáy là: $SIH = \beta$

2/ Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy



∗ SA $\perp$ (ABC)
∗ Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy là: $SBA = \alpha$
∗ Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy là: $SCA = \beta$

∗ SA $\perp$ (ABCD)
∗ Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy là: $SBA = \alpha$
∗ Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy là: $SCA = \beta$
∗ Góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy là: $SDA = \varphi$