Phân tích câu VIIa (câu cuối) của chương trình chuẩn

Để ý trong các đề thi Đại học những năm gần đây ở câu VIIa (câu cuối) của chương trình chuẩn:

Năm 2009; 2010; 2011: câu VIIa là câu số phức (chương trình 12)

Năm 2012 khối D là câu số phức, các khối còn lại Nhị thức Newton, xác suất (của lớp 11).

Năm 2013 khối D là câu số phức, các khối còn lại, xác suất (của lớp 11).

Vậy năm 2014, câu cuối của chương trình chuẩn, dự đoán thế nào?

Qua tham khảo các đề thi thử tôi thấy họ thay câu số phức bởi câu giới hạn hoặc câu tính đạo hàm bằng định nghĩa (thực chất cũng là tìm giới hạn). Hai dạng này của lớp 11, đa số các em đều quên, tôi tóm tắt vài dạng cơ bản để các em nắm lại.

(Thà ôn thừa còn hơn bỏ sót)

1. Giới hạn :

- Khi gặp các giới hạn dạng: $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};\infty-\infty;0.\infty$ chúng ta phải biến đổi, vì đây là 4 dạng vô định, các dạng còn lại ta chỉ việc để đáp số.

VD1: (không rơi vào 4 dạng trên, chỉ việc thế vào là có kết quả)

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{3}{4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+2x-5)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2x-5)=-\infty$; .....

VD2 : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ (dạng $\frac{0}{0}$) phải biến đổi

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

VD3 : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x}{x^2-1}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$) phải biến đổi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=2$$

Chú ý: Gặp các giới hạn dạng này, nếu thấy

- Bậc ở tử > bậc ở mẫu thì có thể để ngay kết quả là ∞

- Bậc ở tử < bậc ở mẫu thì có thể để ngay kết quả là 0

- Bậc ở tử = bậc ở mẫu thì có thể để ngay kết quả là tỉ số của hai hệ số của bậc cao nhất (như vd3)

VD4 : $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ (dạng ∞ - ∞) phải biến đổi, nhân cho lượng liên hợp của $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ là $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ vì $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ = a – b với a, b >0

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(\sqrt{x^2+x}+x)}==\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

VD5 : $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$ (dạng ∞ - ∞)

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{(\sqrt{x^2+x}-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(\sqrt{x^2+x}-x)}==\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}=-\frac{1}{2}$$

Ở VD5, học sinh hay sai vì quên mất rằng $\sqrt{x^2}$ **= |x|**

nên khi x -> +∞ thì $\sqrt{x^2}$ = x; còn x -> -∞ thì $\sqrt{x^2}$ = -x.

Cụ thể, ở đây $\sqrt{x^2+x}$ = $\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}$ = |x|$\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ = -x$\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ nên khi chia tử và mẫu cho x thì ta được kết quả như trên.

VD6 : $\lim_{x\to+\infty}[(\frac{3-2x}{x^3-2})(x^2+\frac{1}{x})]$ (Dạng $0.\infty$) phải biến đổi

$$\lim_{x\to+\infty}[(\frac{3-2x}{x^3-2})(x^2+\frac{1}{x})]=\lim_{x\to+\infty}[(\frac{3-2x}{x^3-2})(\frac{x^3+1}{x})]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\frac{3}{x}-2).x^3(1+\frac{1}{x^3})}{x^3(1-\frac{2}{x^3}).x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{3}{x}-2).(1+\frac{1}{x^3})}{(1-\frac{2}{x^3})}=-2.$$

- Nếu gặp dạng vô định chứa căn bậc ba thì ta dùng các hằng đẳng thức sau để khử căn bậc ba:

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$; $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

VD7 : $\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt[3]{x^3+2x^2})$ (dạng ∞ - ∞)

Ta có $\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt[3]{x^3+2x^2}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt[3]{x^3+2x^2})(x^2+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}+\sqrt[3]{(x^3+2x^2)^2})}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}+\sqrt[3]{(x^3+2x^2)^2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}+\sqrt[3]{(x^3+2x^2)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}+\sqrt[3]{(1+\frac{2}{x})^2}}=-\frac{2}{3}$$

- Nếu gặp dạng vô định vừa chứa căn bậc hai, vừa chứa căn bậc ba thì ta thường thêm bớt phù hợp rồi tách ra làm hai, gồm một giới hạn chỉ chứa căn bậc hai và một giới hạn chỉ chứa căn bậc ba.

VD8 : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3+1})$ (dạng ∞ - ∞)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3+1}) = \lim_{x\to+\infty}[(\sqrt{x^2+x}-x)+(x-\sqrt[3]{x^3+1})]$$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{(\sqrt{x^2+x}+x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \dfrac{1}{2}$

và $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt[3]{x^3+1}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-\sqrt[3]{x^3+1})(x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2})}{(x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2})} =$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{(x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2})} = 0$$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3+1}) = \dfrac{1}{2}+0 = \dfrac{1}{2}$

Chú ý : Gặp dạng $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$ ta có thể dùng đạo hàm để kiểm tra kết quả (đạo hàm tử riêng, đạo hàm mẫu riêng chứ không phải áp dụng công thức đạo hàm $\dfrac{u}{v}$)

VD 2’ : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ (dạng $\dfrac{0}{0}$, lấy VD 2 ở trên)

Ta có $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2-4)'}{(x-2)'} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x}{1} = 4$

VD 3’ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3x}{x^2-1}$ (dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$, lấy VD 3 ở trên)

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x^2+3x)'}{(x^2-1)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+3}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4x+3)'}{(2x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{2} = 2$

- Ngoài ra các em phải nắm các công thức sau :

$\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$; $\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$; $\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{e^\alpha-1}{\alpha} = 1$; $\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$; và $e^{\ln\alpha} = \alpha$.

Chú ý : α có thể là một biểu thức

ví dụ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to0}2.\dfrac{\sin 2x}{2x} = 2$. Ở đây xem α là 2x.

VD9 : Tính I = $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x.3^{x^2}-1}{\ln(1-2x)}$ (trích đề thi thử ĐH lần I năm 2014 trường chuyên Lê Quý Đôn – Bình Định).

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x.3^{x^2}-1}{\ln(1-2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x(3^{x^2}-1)+(2^x-1)}{\ln(1-2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x(3^{x^2}-1)}{\ln(1-2x)}+\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)}{\ln(1-2x)}$$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x(3^{x^2}-1)}{\ln(1-2x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x(3^{x^2}-1)}{\dfrac{\ln(1-2x)}{-2x}(-2x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x(3^{x^2}-1)}{-2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x(e^{x^2\ln 3}-1)}{-2x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2^x(e^{x^2\ln 3}-1)(x^2\ln 3)}{-2x(x^2\ln 3)} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x(x^2\ln 3)}{-2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x(x\ln 3)}{-2} = 0.$$

Và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-1)}{\ln(1-2x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-1)}{\dfrac{\ln(1-2x)}{-2x}(-2x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{-2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x\ln 2}-1)x\ln 2}{(x\ln 2)(-2x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln 2}{-2x} = -\dfrac{\ln 2}{2}$

Vậy I = $-\dfrac{\ln 2}{2}$.

2. Định nghĩa đạo hàm tại x_0 :

f'(x_0) = $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Nếu đặt Δx = x – x_0 $\Leftrightarrow$ x = x_0 + Δx thì định nghĩa đạo hàm được viết lại là

f'(x_0) = $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Ví dụ: Cho hàm số f(x) = $\begin{cases} 0 & \text{neu } x = 0 \\ \dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x} & \text{neu } x \neq 0 \end{cases}$

Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số tại x_0 = 0.

HD:

f'(0) = $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{[\sqrt[3]{1+3x}-(1+x)]-[(\sqrt{1+2x}-(1+x)]}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-(1+x)}{x^2} - \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}$$

dễ dàng tính được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-(1+x)}{x^2}$ = -1 ; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}$ = - $\dfrac{1}{2}$

Vậy f'(0) = -1-(- $\dfrac{1}{2}$) = - $\dfrac{1}{2}$.

Tóm tắt lý thuyết GT Tổ hợp

1. Khái niệm giai thừa: ($n \in N$)

ĐN: n! = 1.2.3..... n

Qui ước : 0! = 1! = 1

VD1: 4! = 1.2.3.4; để ý 1.2.3 = 3! nên ta có thể viết 4! =3!4

Tương tự 10! = 9!10 = 8!9.10 = 7!8.9.10

Tổng quát :

n! = (n-1)!n = (n-2)!(n-1)n = (n-3)!(n-2)(n-1)n = ...

VD2: $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)!n.(n+1)}{(n-1)!}$ = n(n+1)

2. Hoán vị : Mỗi cách sắp xếp n phần tử theo một thứ tự nhất định, đgl một hoán vị của n phần tử đó. ($n \in N^*$)

VD3: Sắp xếp 3 học sinh An (A), Bình (B), Chiến (C) cùng ngồi trên một bàn dài :

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA có 6 cách. Mỗi cách sắp xếp như thế đgl một hoán vị của 3 phần tử.

Câu hỏi đặt ra là : Nếu số học sinh không phải là 3 em mà là 5 em chẳng hạn thì làm sao để đếm đủ số cách sắp xếp cho khỏi sót?

Trả lời câu hỏi trên, ta có công thức sau:

Số các hoán vị của n phần tử là : $P_n = n!$

Ở vd3 rõ ràng có 3! = 6 cách hoán vị 3 phần tử.

Suy ra sắp xếp 5 em A,B,C,D,E có 5! = 120 cách, ...

3. Chỉnh hợp: Mỗi cách lấy ra k phần tử từ n phần tử cho trước và sắp xếp k phần tử đó theo một thứ tự nhất định, đgl một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho. ($k \le n \in N^*$)

VD4: Liệt kê các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau từ 3 chữ số 4,5,7 cho trước.

Có các số : 45; 54; 47; 74; 57; 75 có 6 số

Câu hỏi đặt ra là : Nếu số nhiều thì làm sao để đếm đủ số cách sắp xếp cho khỏi sót?

Trả lời câu hỏi trên, ta có công thức sau:

Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử là : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Từ công thức trên, suy ra nếu k = n thì $A_n^k \equiv P_n$

VD5: Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không được tạo thành từ 4 điểm phân biệt A,B,C,D?

Trả lời: Chọn 2 điểm từ 4 điểm đã cho sẽ tạo được một véctơ. Để ý rằng véctơ $\overrightarrow{AB}$ khác véctơ $\overrightarrow{BA}$ (tức là có tôn trọng thứ tự $AB \neq BA$ giống như $12 \neq 21$ vậy) nên mỗi véctơ tạo thành là một chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử. Vậy có $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ véctơ tạo thành từ 4 điểm phân biệt đã cho.

4. Tổ hợp: Mỗi cách lấy ra k phần tử từ n phần tử cho trước (k phần tử lấy ra không cần sắp xếp thứ tự), đgl một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho. ($k \le n \in N^*$)

VD6: Liệt kê các cách chọn ra 2 bạn từ 3 bạn An (A), Bình (B), Chiến (C) để đi dọn vệ sinh?.

Liệt kê: AB, AC, BC có 3 cách.

Câu hỏi đặt ra là : Nếu số nhiều thì làm sao để đếm đủ số cách sắp xếp cho khỏi sót?

Trả lời câu hỏi trên, ta có công thức sau:

Số các tổ hợp chập k của n phần tử là : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

VD7: Một tổ học sinh có 10 em. Có bao nhiêu cách chọn 2 em đi tập văn nghệ?

Trả lời: Để ý rằng chọn 2 em A-B cũng giống như 2 em B-A (tức là không cần thứ tự {A,B} = {B,A}) nên mỗi cách chọn 2 em từ 10 em đã cho là một tổ hợp chập 2 của 4 phần tử. Vậy có $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$ cách.

Vậy khi nào dùng tổ hợp, khi nào dùng chỉnh hợp?

Trả lời: Cùng một cách lấy ra k phần tử từ n phần tử cho trước, nếu k phần tử đó có sắp xếp thứ tự thì dùng chỉnh hợp; không sắp xếp thứ tự thì dùng tổ hợp.

5. Công thức Newton:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n = = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Để ý các công thức :

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$
2. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
3. Trong công thức Newton, cho a=b=1 ta được : $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$
4. Cho a=1; b=-1 ta được : $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$
5. Từ công thức thứ 4 suy ra : $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$ $n \ge 4$

VD8: (ĐH khối D-2002) Tìm số nguyên dương n sao cho $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n = 243$

Giải:

Nhận xét + $243 = 3^5$

+ Vế trái của đẳng thức đã cho là tổng của các số $C_n^k 2^k$ với k chạy từ 0 đến n

(Trong toán học kí hiệu là $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$)

Theo công thức Newton thì $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$. (vì 1^{n-k} luôn bằng 1)

Đối chiếu với nhận xét trên suy ra x =2

Vậy $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2^n C_n^n = (2+1)^n = 3^n$. Theo giả thiết suy ra $3^n = 243 = 3^5$. ĐS: n=5

6. Xác suất của biến cố:

+ Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử nào đó đgl không gian mẫu của phép thử đó.

VD: - Phép thử là gieo con xúc sắc 1 lần thì không gian mẫu là $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- Phép thử là gieo đồng xu 2 lần thì không gian mẫu là $\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$

+ Biến cố là tập con của không gian mẫu.

VD: Gieo đồng xu 2 lần thì không gian mẫu là $\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$. Gọi A là biến cố có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp thì A = {SS,SN,NS}

+ Xác suất của biến cố A, kí hiệu là P(A) được định nghĩa là: P(A) = $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$, với n(X) là số phần tử của tập hợp X. Từ định nghĩa suy ra $0 \le P(A) \le 1$

VD9: (ĐH khối A-2013) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau được chọn từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

Giải: Lấy ra 3 chữ số từ 7 chữ số (3 chữ số có sắp xếp thứ tự) có A_7^3 = 210 số, vậy S có 210 phần tử. Các số chẵn trong tập S có dạng $\overline{abc}$, với c có 3 cách chọn; b có 6 cách chọn; a có 5 cách chọn, vậy số các số tự nhiên chẵn trong S là 3.6.5 = 90 số. Suy ra xác suất cần tìm là $\frac{90}{210} = \frac{3}{7}$.

Chúc các em may mắn

TRUNG TÂM GIA SƯ, LUYỆN THI ALPHA THÀNH PHỐ VINH

Địa chỉ: Số 04 - Ngõ 03 - Đường Tân Hùng - Tp.Vinh

Điện thoại : 0917.638.972 – 0984.638.972

Email: trungtamgiasu.alpha@gmail.com

Website: giasualpha.edu.vn