

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1. (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (1), với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho $OA^2 + OB^2 = 20$.

Câu 2. (1,0 điểm). Giải phương trình $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + 4 = 3(\cos x + \sqrt{3} \sin x)$.

Câu 3. (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1)^2 + xy + 2y - 17 = 0 \\ (x+y)(xy+4) = 32 \end{cases}$$

Câu 4. (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x+2 \ln x}{(x+2)^2} dx$.

Câu 5. (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $BA = a$. Tam giác SAC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $mp(ABC)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC ; biết góc giữa MN với $mp(ABC)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AC, MN theo a .

Câu 6. (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{3+ab+bc+ca} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm) : Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần riêng (phần A hoặc phần B)**A. Theo chương trình Chuẩn**

Câu 7.a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12. Tâm I là giao điểm của hai đường thẳng $d_1 : x - y - 3 = 0$ và đường thẳng $d_2 : x + y - 6 = 0$. Trung điểm của cạnh AD là giao điểm của d_1 với trục hoành. Xác định tọa độ bốn đỉnh của hình chữ nhật.

Câu 8.a (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho mặt cầu (S) tâm M tiếp xúc với trục Oz có bán kính bằng 2.

Câu 9.a (1,0 điểm). Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z}{1-2i} + \bar{z} = 2$. Tìm phần thực của số phức $w = z^2 - z$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ và điểm $A(1;0)$. Gọi M, N là hai điểm trên đường tròn (C) sao cho tam giác AMN vuông cân tại A . Viết phương trình cạnh MN .

Câu 8.b (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-2}$ và hai điểm $A(-2; 1; 1); B(-3; -1; 2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$.

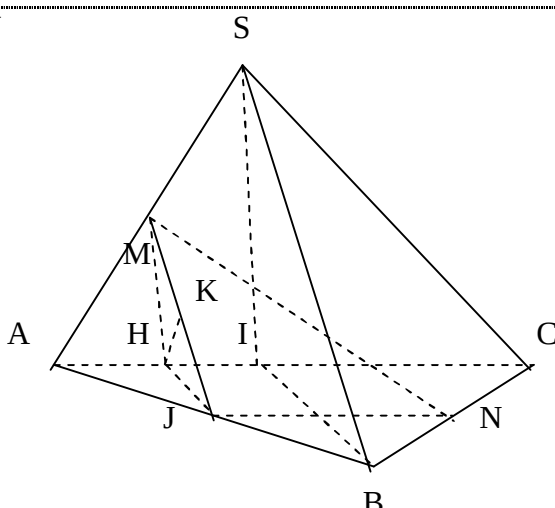
Câu 9.b (1,0 điểm). Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z-2i} \right| = 1$. Tìm số phức z biết $\left| z + \frac{3}{2} - 5i \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

..... Hết

ĐÁP ÁN THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 85

Câu	Nội dung	Điểm																
1.1	1. (1,0 điểm) Khảo sát... $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (1)	1,00																
	Khi $m = 1$, ta có $y = x^3 - 3x^2 + 4$ * TXĐ: $D = \mathbb{R}$ * Sự biến thiên: +) Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$	0,25																
	+) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = 4$; đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = 0$ +) Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = +\infty$	0,25																
	+) Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>4</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	y'	+	0	-	0	+	y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$													
y'	+	0	-	0	+													
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$														
* Đồ thị: 	0,25																	
1.2	• Xác định m để....	1,00																
	Ta có $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$. Đồ thị hàm số có hai cực trị tại A và B khi và chỉ khi $2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ (*)	0,25																
	Khi đó: Gọi $A(0; 4m^3)$ và $B(2m; 0)$; từ giả thiết: $OA^2 + OB^2 = 20$, suy ra:	0,25																

	$16m^6 + 4m^2 = 20 \Leftrightarrow 4m^6 + m^2 - 5 = 0$	
	$(m^2 - 1) \underbrace{(4m^4 + 4m^2 + 5)}_{>0, \forall m} = 0 \Leftrightarrow (m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1 (TM (*))$	0,25
	Vậy $m = \pm 1$.	0,25
2	Giải phương trình: $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + 4 = 3(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \quad (1)$	1,00
	Đặt $t = \cos x + \sqrt{3} \sin x$ $\Rightarrow t^2 = \cos^2 x + 3 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = \frac{1 + \cos 2x}{2} + 3 \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sqrt{3} \sin 2x = 2 - \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$ $\Rightarrow \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = t^2 - 2$	0,25
	Khi đó, (1) trở thành: $t^2 - 2 + 4 = 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$	0,25
	+) $t = 1$ thì: $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1 \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}$ +) $t = 2$ thì: $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$	0,25
	Vậy phương trình có 3 họ nghiệm: $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$	0,25
3	Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^2 + xy + 2y - 17 = 0 \\ (x+y)(xy+4) = 32 \end{cases}$	1,00
	Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} x(x+y) + 2(x+y) = 16 \\ (x+y)(xy+4) = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 = (x+y)(x+2) & (1) \\ (x+y)(xy+4) = 2 \cdot 16 & (2) \end{cases}$	0,25
	Thế (1) vào (2) được: $(x+y)(xy+4) = 2(x+y)(x+2) \Leftrightarrow x(x+y)(y-2) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0; x + y = 0; y = 2$.	0,25
	+) $x = 0$ thay vào (1) được: $y = 8$ +) $x + y = 0$ thay vào (1) được: $0x = 16$ (VN) +) $y = 2$ thay vào (1) được: $x = 2$ hoặc $x = -6$	0,25
	Vậy hệ đã cho có ba nghiệm: $(0; 8); (2; 2); (-6; 2)$	0,25
4	Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x+2 \ln x}{(x+2)^2} dx$	1,00
	Đặt $\begin{cases} u = x + 2 \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+2)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{x+2}{x} dx \\ v = \frac{-1}{x+2} \end{cases}$	0,25
	$I = -\frac{x+2 \ln x}{x+2} \Big _1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x}$	0,25
	$= -\frac{1}{6} - \frac{\ln 2}{2} + \ln x \Big _1^2 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{6}$	0,25
	Vậy $I = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{6}$.	0,25
5	Tính thể tích ...	1,00
	Gọi I là trung điểm AC, do ΔSAC cân tại S nên $SI \perp (ABC)$. Gọi H là trung điểm AI suy ra	0,25

	$MH // SI \Rightarrow MH \perp (ABC)$, do đó $(MN, (ABC)) = \angle MNH = 60^\circ$. Ta có $S_{ABC} = \frac{a^2}{2}$. Xét $\triangle HCN$ có: $NC = \frac{a}{2}; HC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}; NH^2 = HC^2 + NC^2 - 2HC \cdot NC \cdot \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{8}; NH = \frac{a\sqrt{10}}{4}$ Trong $\triangle MHN$ có $MH = NH \tan 60^\circ = a \frac{\sqrt{30}}{4}; SI = 2MH = a \frac{\sqrt{30}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SI \cdot S_{ABC} = a^3 \frac{\sqrt{30}}{12}$ Gọi J là trung điểm AB, K là hình chiếu vuông góc của H lên MJ tức là $HK \perp MJ$ (1). Ta có $JN \perp BI$, mà $BI // HJ \Rightarrow JN \perp HJ$ (2) $SI // MH$, mà $SI \perp JN \Rightarrow JN \perp MH$ (3) (2), (3) $\Rightarrow JN \perp (MHJ) \supset HK \Rightarrow HK \perp JN$ (4) (1), (4) $\Rightarrow HK \perp (MNJ)$ $d(AC, MN) = d(H \in AC, MN) = d(H, (MNJ)) = HK$ $= \frac{MH \cdot HJ}{\sqrt{MH^2 + HJ^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{30}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{\frac{30a^2}{16} + \frac{2a^2}{16}}} = \frac{a\sqrt{30}}{16}$	0,25
		0,25
6	Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức áp dụng Bất đẳng thức: $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{R}$ ta có: $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) = 9abc > 0 \Rightarrow ab + bc + ca \geq 3\sqrt{abc}$ Ta có: $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3, \forall a, b, c > 0$. Thật vậy: $(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt{(abc)^2} + abc = (1 + \sqrt[3]{abc})^3$	1,00
	Khi đó: $P \leq \frac{2}{3(1 + \sqrt{abc})} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{1 + \sqrt[3]{abc}} = Q$ (1). Đặt $\sqrt[6]{abc} = t$; vì a, b, c > 0 nên $0 < abc \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3 = 1$	0,25
	Xét hàm số $Q = \frac{2}{3(1 + t^3)} + \frac{t^2}{1 + t^2}, t \in (0; 1] \Rightarrow Q'(t) = \frac{2t(t - 1)(t^5 - 1)}{(1 + t^3)^2(1 + t^2)^2} \geq 0, \forall t \in (0; 1]$. Do đó hàm số đồng biến trên $(0; 1] \Rightarrow Q = Q(t) \leq Q(1) = \frac{1}{6}$ (2). Từ (1) và (2): $P \leq \frac{1}{6}$.	0,25
	Vậy $\max P = \frac{1}{6}$, đạt được khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$.	0,25
7.a	• Tìm tọa độ đỉnh của hình chữ nhật	1,00

	Tọa độ I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y-3=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Gọi M là trung điểm của AD, Tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=0 \\ x-y-3=0 \end{cases} \Rightarrow M(3;0)$	0,25
	Suy ra $AB = 2 IM = 3\sqrt{2}$. Mặt khác $S_{ABCD} = AB \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Vì M, I cùng thuộc d_1 suy ra $AD \perp d_1$. Vậy AD đi qua điểm M và nhận $\vec{n} = (1;1)$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình: $x-3+y=0 \Leftrightarrow x+y-3=0$.	0,25
	Lại có $MA = MD = \frac{AD}{2} = \sqrt{2}$. Tọa độ điểm A, D là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-3=0 \\ \sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$. Chọn $A(2;1); D(4;-1)$	0,25
	Các điểm C, B lần lượt đối xứng với A, D qua I. Suy ra tọa độ điểm C(7; 2); B(5;4)	0,25
8.a	• Tìm tọa độ điểm M	1,00
	Vì $M \in d$ nên $M(1+t; -2+2t; -2t)$. Trục Oz đi qua điểm O(0; 0; 0) và có vtcp $\vec{k} = (0;0;1)$;	0,25
	$\overrightarrow{OM} = (1+t; -2+2t; -2t)$. Suy ra: $[\overrightarrow{OM}; \vec{k}] = (-2+2t; -1-t; 0) \Rightarrow \left\ [\overrightarrow{OM}; \vec{k}] \right\ = \sqrt{5t^2 - 6t + 5}$	0,25
	Gọi R là bán kính mặt cầu (S), ta có $R = d(M; Oz) = \sqrt{5t^2 - 6t + 5}$	0,25
	$R = 2$ suy ra $\sqrt{5t^2 - 6t + 5} = 2 \Leftrightarrow 5t^2 - 6t + 5 = 4 \Leftrightarrow 5t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2;0;-2) \\ M\left(\frac{6}{5}; -\frac{8}{5}; \frac{2}{5}\right) \end{cases}$	0,25
9.a	• Tìm Phần thực của w	1,00
	$\frac{z}{1-2i} + \bar{z} = 2 \Leftrightarrow z + (1-2i)\bar{z} = 2-4i$ (1). Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)	0,25
	(1) trở thành: $a + bi + (1-2i)(a-bi) = 2-4i \Leftrightarrow (2a-2b) - 2ai = 2-4i$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = -4 \\ 2a-2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 2+i$	0,25
	$w = z^2 - z = 1+3i$. Vậy phần thực của w bằng 1.	0,25
7.b	• Viết pt đường thẳng MN	1,00
	Ta có I(1;-2) suy ra $\overrightarrow{IA} = (0;2)$. Tam giác AMN cân khi IA vuông góc MN. Gọi (d) là đường thẳng vuông góc với IA, nên (d) nhận $\frac{1}{2}\overrightarrow{IA} = (0;1)$ làm véc tơ pháp tuyến, PT (d) có dạng: $0x + 1.y + m = 0$ hay $y = -m$ (1). Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là: $x^2 - 2x + m^2 + 4m - 5 = 0$ (1).	0,25
	(d) cắt (C) tại M, N khi PT (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta'_{(1)} = -m^2 - 4m + 6 > 0 (*)$. Khi đó, theo Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m^2 + 4m - 5 \end{cases}$	0,25
	Gọi $M(x_1; -m); N(x_2; -m) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (x_1-1; -m); \overrightarrow{AN} = (x_2-1; -m)$. ΔAMN vuông tại A khi	0,25
	$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + m^2 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-3 \end{cases}$ (TM (*))	0,25

	Vậy Phương trình đường thẳng MN là : $y = -1$; $y = 3$.	0,25
8.b	Tìm tọa độ điểm M	1,00
	$M \in \Delta \Rightarrow M(-2 + t; 1 + 3t; -5 - 2t)$	0,25
	$\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 1); \overrightarrow{AM} = (t; 3t; -6 - 2t); [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = (t + 12; -t - 6; -t)$	0,25
	$S_{MAB} = 3\sqrt{5} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{(t + 12)^2 + (-t - 6)^2 + t^2} = 3\sqrt{5}$	0,25
	$\Leftrightarrow 3t^2 + 36t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hay $t = -12$. Vậy M (-2; 1; -5) hay M (-14; -35; 19)	0,25
9.b	Tìm số phức z	1,00
	$\left \frac{z-1}{z-2i} \right = 1 \Leftrightarrow z-1 = z-2i (z \neq 2i) \quad (1)$. Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)	0,25
	(1) trở thành: $(a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-2)^2 \Leftrightarrow a = 2b - \frac{3}{2} \Rightarrow z = 2b - \frac{3}{2} + bi$	0,25
	$\left z + \frac{3}{2} - 5i \right = 2b + (b-5)i = \sqrt{5b^2 - 10b + 25} = \sqrt{5(b-1)^2 + 20} \geq \sqrt{20}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow b = 1$	0,25
	Vậy GTNN của $\left z + \frac{3}{2} - 5i \right $ bằng $\sqrt{20}$ đạt được khi và chỉ khi $b = 1$. Khi đó $z = \frac{1}{2} + i$	0,25

Lưu ý: Thí sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm các phần tương ứng.

Chúc các em thành công trong kỳ thi đại học sắp tới !

TRUNG TÂM GIA SƯ, LUYỆN THI ALPHA THÀNH PHỐ VINH

Địa chỉ: Số 04 - Ngõ 03 - Đường Tân Hùng - Tp.Vinh

Điện thoại : 0917.638.972 – 0984.638.972

Email: trungtamgiasu.alpha@gmail.com

Website: giasualpha.edu.vn

Facebook: <https://www.facebook.com/groups/giasualpha/>