

SÁNG TẠO HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHƯƠNG PHÁP 5: DÙNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + xy = -1 \\ x^2 + y^2 - xy = 7 \end{cases}$$

Lời giải.

Đây là hệ đối xứng loại I đơn giản nên ta giải theo cách phổ biến.

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y) + xy = -1 \\ (x + y)^2 - 3xy = 7 \end{cases}$$

$$\text{Đặt} \begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases} \quad (\exists x, y \Leftrightarrow S^2 \geq 4P) \text{ ta được} \begin{cases} S + P = -1 \\ S^2 - 3P = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1, P = -2 \\ S = -4, P = 3 \end{cases}$$

$$\text{TH 1.} \begin{cases} S = 1 \\ P = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y = 2 \\ x = 2, y = -1 \end{cases}$$

$$\text{TH 2.} \begin{cases} S = -4 \\ P = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y = -3 \\ x = -3, y = -1 \end{cases}. \text{ Vậy tập nghiệm của hệ là}$$

$$S = \{(-1; 2); (2; -1); (-1; -3); (-3; -1)\}$$

Chú ý.

- Nếu hệ pt có nghiệm là $(x; y)$ thì do tính đối xứng, hệ cũng có nghiệm là $(y; x)$.
Do vậy, để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x = y$.
- Không phải lúc nào hệ đối xứng loại I cũng giải theo cách trên. Đôi khi việc thay đổi cách nhìn nhận sẽ phát hiện ra cách giải tốt hơn.

Bài tập tương tự : (ĐT 2010) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x - y - xy = 3 \end{cases}$$

Bài 2 ($D - 2004$) Tìm m để hệ có nghiệm :
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$$

Bài 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ xy(x + 1)(y + 1) = 72 \end{cases}$$

Phân tích. Đây là hệ đối xứng loại I

- Hướng 1. Biểu diễn từng pt theo tổng $x + y$ và tích xy

TRUNG TÂM GIA SƯ LUYỆN THI ALPHA THÀNH PHỐ VINH

- Hướng 2. Biểu diễn từng pt theo $x^2 + x$ và $y^2 + y$. Rõ ràng hướng này tốt hơn.

Lời giải.

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x) + (y^2 + y) = 18 \\ (x^2 + x)(y^2 + y) = 72 \end{cases} \cdot \text{Đặt} \begin{cases} x^2 + x = a, a \geq -\frac{1}{4} \\ y^2 + y = b, b \geq -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ ta được}$$

$$\begin{cases} a + b = 18 \\ ab = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6, b = 12 \\ a = 12, b = 6 \end{cases}$$

$$\text{TH 1.} \begin{cases} a = 6 \\ b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 6 \\ y^2 + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, x = -3 \\ y = 3, y = -4 \end{cases}$$

$$\text{TH 2.} \text{Đổi vai trò của } a \text{ và } b \text{ ta được } \begin{cases} x = 3, x = -4 \\ y = 2, y = -3 \end{cases} \cdot \text{Vậy tập nghiệm của hệ là}$$

$$S = \{(2;3); (2;-4); (-3;3); (-3;-4); (3;2); (-4;2); (3;-3); (-4;-3)\}$$

❖ Nhận xét. Bài toán trên được hình thành theo cách sau:

- **Xuất phát từ hệ phương trình đơn giản** $\begin{cases} a + b = 18 \\ ab = 72 \end{cases}$ (I)

-

1) Thay $a = x^2 + x, b = y^2 + y$ vào hệ (I) ta được hệ

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ xy(x+1)(y+1) = 72 \end{cases} \text{ đó chính là ví dụ 2.}$$

2) Thay $a = x^2 + xy, b = y^2 - xy$ vào hệ (I) ta được hệ

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ xy(x^2 - y^2) = 72 \end{cases}$$

3) Thay $a = x^2 + 2x, b = 2x + y$ vào hệ (I) ta được hệ

$$(3) \begin{cases} x^2 + 4x + y = 18 \\ x(x+2)(2x+y) = 72 \end{cases}$$

4) Thay $a = x + \frac{1}{x}, b = y + \frac{1}{y}$ vào hệ (I) ta được hệ

$$(4) \begin{cases} (x+y)xy + x + y = 18xy \\ (x^2+1)(y^2+1) = 72xy \end{cases}$$

5) Thay $a = x^2 + 2xy$, $b = y^2 - xy$ vào hệ (I) ta được hệ

$$(5) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 18 \\ xy(x+2y)(y-x) = 72 \dots \end{cases}$$

a. Như vậy, với hệ xuất phát (I), bằng cách thay biến ta thu được rất nhiều hệ pt mới.

b. Thay hệ xuất phát (I) bằng hệ xuất phát (II)

$$\begin{cases} a+b=7 \\ a^2-b^2=21 \end{cases}$$

và làm tương tự như trên ta lại thu được các hệ mới khác. Chẳng hạn :

6) Thay $a = x^2 + y^2$, $b = xy$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(6) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}$$

7) Thay $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(7) \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7 \\ x^2 - y^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 21 \end{cases}$$

8) Thay $a = x + \frac{1}{y}$, $b = \frac{x}{y}$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(8) \begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ (xy+1)^2 + x^2 = 21y^2 \end{cases}$$

9) Thay $a = x + y$, $b = \frac{1}{y}$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(9) \begin{cases} (x+y)y + 1 = 9y \\ (x+y-2)^2 y^2 - 21y^2 = 1 \end{cases}$$

TRUNG TÂM GIA SƯ LUYỆN THI ALPHA THÀNH PHỐ VINH

10) Thay $a = x^2 + 2x, b = y^2 + 2x$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(10) \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 7 \\ x^4 - y^4 + 4x(x^2 - y^2) = 21 \end{cases}$$

Bài 5 (D – 2007) Tìm m để hệ có nghiệm :
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3} = 15m - 10 \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ $\begin{cases} a = x + \frac{1}{x} \\ b = y + \frac{1}{y} \end{cases}$	Điều kiện $ a ; b \geq 2$ Ta có hệ $\begin{cases} a + b = 5 \\ a^3 - 3a + b^3 - 3b = 15m - 10 \end{cases}$
--	---

Bài 6 Giải hệ phương trình :

a) (CD – 2010) $\begin{cases} 2\sqrt{2x+y} = 3 - 2x - y \\ x^2 - 2xy - y^2 = 2 \end{cases}$	b) (B – 2002) $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ x+y = \sqrt{x+y+2} \end{cases}$
c) $\begin{cases} \sqrt{x-2y} = 2 - x + 2y \\ \sqrt[3]{4-2x} - \sqrt{2y+4} = 1 \end{cases}$	d)

Bài 7 Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 3x^3 + (6-y)x^2 - 2xy - 18 = 0 \\ x^2 - x + y = -3 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x^3 + (6-y)x^2 - 3xy - 18 = 0 \\ x^2 + x + y = -7 \end{cases}$
---	---

a) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2)(3x-y) - 18 = 0 \\ x(x+2) - (3x+y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Đặt $\begin{cases} a = x(x+2) \\ b = 3x-y \end{cases}$ Nghiệm $x = 1; -3$

b) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+3)(2x-y) - 18 = 0 \\ x(x+3) - (2x+y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Đặt $\begin{cases} a = x(x+3) \\ b = 2x-y \end{cases} \Rightarrow$ Nghiệm

Bài 8 (D – 2009) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x(x+y+1) - 3 = 0 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

- ĐK. $x \neq 0$. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 - 3 \cdot \frac{1}{x} = 0 \\ (x+y)^2 - 5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = 0 \end{cases}$ Đặt $x+y = a, \frac{1}{x} = b$ ta

được hệ :

$$\begin{cases} a+1-3b=0 \\ a^2-5b^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b-1 \\ (3b-1)^2-5b^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2, b=1 \\ a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ x=2, y=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Bài 9 (A – 2008) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

- Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y) + xy(x^2 + y + 1) = -\frac{5}{4} \\ (x^2 + y)^2 + xy = -\frac{5}{4} \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} x^2 + y = a \\ xy = b \end{cases}$ ta được :

$$\begin{cases} a + b(a+1) = -\frac{5}{4} \\ a^2 + b = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - ab = 0 \\ b = -\frac{5}{4} - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b = -\frac{5}{4} \\ a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

- Vậy tập nghiệm của hệ pt là $S = \left\{ \left(1; -\frac{3}{2} \right); \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \right) \right\}$

Bài 10 Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x+y) = 7 \\ y(y-2x) - 2x = 10 \end{cases}$$

- Hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x+y) = 7 \\ y(y-2x) - 2x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9 \\ (y-x)^2 - (x+1)^2 = 9 \end{cases}$

- Đặt $a = x+1, b = y+1 \Rightarrow b-a = y-x$ ta được hệ $\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ (b-a)^2 - a^2 = 9 \end{cases}$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (b-a)^2 - a^2 \Leftrightarrow a^2 = -2ab \Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } a = -2b$$

- Với $a = 0 \Rightarrow b = \pm 3 \Rightarrow x = -1, y = 2$ hoặc $x = -1, y = -4$

- Với $a = -2b \Rightarrow 5b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = \mp \frac{6}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow x = -1 - \frac{6}{\sqrt{5}}, y = -1 + \frac{3}{\sqrt{5}} \text{ hoặc } x = -1 + \frac{6}{\sqrt{5}}, y = -1 - \frac{3}{\sqrt{5}}$$

TRUNG TÂM GIA SƯ LUYỆN THI ALPHA THÀNH PHỐ VINH

Cách 2 : Thế (1) vào PT (2) và rút gọn ta được :

$$x^2 + 2xy + 4x + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2y+3) = 0$$

Bài 11 (A – 2006) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

- ĐK: $x \geq -1, y \geq -1, xy \geq 0$

- Hệ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ x + y + 2 + 2\sqrt{(x+1)(y+1)} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ x + y + 2\sqrt{x+y+xy+1} = 14 \end{cases}$$

- Đặt $x + y = a, \sqrt{xy} = b$. $a \geq -2, b \geq 0, a^2 \geq 4b^2$ ta được hệ pt

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ a + 2\sqrt{a+b^2+1} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + b \\ 2\sqrt{b^2 + b + 4} = 11 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + b \\ 3b^2 + 26b - 105 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn đk)}$$

Bài 12 (Thứ ĐT2010) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 8 \\ \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9} = 10 \end{cases}$. Bình phương cả

2 PT.

Bài 13 (Thứ GL 2012) Giải hệ :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} = 2\sqrt{7} \\ \frac{6}{x+y} + \frac{1}{xy} = -1 \end{cases}$$

- PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+\frac{1}{x})^2 - 2} + \sqrt{(y+\frac{1}{y})^2 - 2} = 2\sqrt{7}$

- PT (2) $\Leftrightarrow 6 + \frac{x+y}{xy} = -(x+y) \Leftrightarrow (x+\frac{1}{x}) + (y+\frac{1}{y}) = -6$ Ta có

$$\begin{cases} a + b = -6 \\ \sqrt{a^2 - 2} + \sqrt{b^2 - 2} = 2\sqrt{7} \end{cases}$$

Bài 14 (ĐT 2011) Giải hệ : $\begin{cases} y(x-7) + x + 1 = 0 \\ 21y^2 - x^2 = (xy+1)^2 \end{cases}$. Lần lượt chia cho $y; y^2$ và đặt ẩn phụ.

Bài 15 (B – 2009) Giải hệ : $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$. Lần lượt chia cho $y; y^2$ và đặt ẩn phụ.

TRUNG TÂM GIA SƯ LUYỆN THI ALPHA THÀNH PHỐ VINH

Bài 16 (Thử ĐT2012) Giải hệ :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases}$$
 Chia 2 vế của 2 PT cho y và đặt ẩn phụ.

Bài 17 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (2x+y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(2x-y)^2 = 0 \\ 2x + \frac{1}{2x-y} = 3 - y \end{cases}$$

Có nhiều bí kíp lắm, chỉ chia sẻ với các em học sinh vài điều cơ bản, hy vọng qua các ví dụ trên các em sẽ phát triển được tư duy và có một định hướng nhất định khi tiếp xúc với 1 bài hệ phương trình.

TRUNG TÂM GIA SƯ, LUYỆN THI ALPHA THÀNH PHỐ VINH

Địa chỉ: Số 04 - Ngõ 03 - Đường Tân Hùng - Tp.Vinh

Điện thoại : 0917.638.972 – 0984.638.972

Email: trungtamgiasu.alpha@gmail.com

Website: giasualpha.edu.vn

Facebook: <https://www.facebook.com/groups/giasualpha/>