Nguyễn Minh Tuấn
Sinh viên K62CLC - Khoa Toán Tin ĐHSPHN

TUYỂN CHỌN 410 BÀI HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VÀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - CAO ĐẲNG

Hà Nội, ngày 9 tháng 10 năm 2013

Mục lục

Lời nói đầu

Hệ phương trình Đại số nói chung và hệ phương trình Đại số hai ẩn nói riêng là một phần quan trọng của phần Đại số giảng dạy ở THPT . Nó thường hay xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi và kì thi tuyển sinh Đại học - Cao đẳng.

Tất nhiên để giải tốt hệ phương trình hai ẩn không phải đơn giản . Cần phải vận dụng tốt các phương pháp, hình thành các kĩ năng trong quá trình làm bài. Trong các kì thi Đại học, câu hệ thường là câu lấy điểm 8 hoặc 9.

Đây là một tài liệu tuyển tập nhưng khá dày nên tôi trình bày nó dưới dạng một cuốn sách có mục lục rõ ràng cho bạn đọc dễ tra cứu. Cuốn sách là tuyển tập khoảng 400 câu hệ đặc sắc, từ đơn giản, bình thường, khó, thậm chí đến đánh đố và kinh điển. Đặc biệt, đây hoàn toàn là hệ Đại số 2 ẩn. Tôi muốn khai thác thật sâu một khía cạnh của Đại số. Nếu coi Bất đẳng thức 3 biến là phần đẹp nhất của Bất đẳng thức, mang trong mình sự uy nghi của một ông hoàng thì Hệ phương trình Đại số 2 ẩn lại mang trong mình vẻ đẹp giản dị, trong sáng của cô gái thôn quê làm say đắm biết bao gã si tình.

Xin cảm ơn các bạn, anh, chị, thầy cô trên các diễn đàn toán, trên facebook đã đóng góp và cung cấp rất nhiều bài hệ hay. Trong cuốn sách ngoài việc đưa ra các bài hệ tôi còn lồng thêm một số phương pháp rất tốt để giải. Ngoài ra tôi còn giới thiệu cho các bạn những phương pháp đặc sắc của các tác giả khác . Mong đây sẽ là một nguồn cung cấp tốt những bài hệ hay cho giáo viên và học sinh.

Trong quá trình biên soạn cuốn sách tất nhiên không tránh khỏi sai sót.Thứ nhất, khá nhiều bài toán tôi không thể nêu rõ nguồn gốc và tác giả của nó. Thứ hai : một số lỗi này sinh trong quá trình biên soạn, có thể do lỗi đánh máy, cách làm chưa chuẩn, hoặc trình bày chưa đẹp do kiến thức về LaTeX còn hạn chế. Tác giả xin bạn đọc lượng thứ. Mong rằng cuốn sách sẽ hoàn chỉnh và thêm phần đồ sộ. Mọi ý kiến đóng góp và sửa đổi xin gửi về theo địa chỉ sau đây :

Nguyễn Minh Tuấn
Sinh Viên Lớp K62CLC
Khoa Toán Tin Trường ĐHSP Hà Nội
Facebook :https://www.facebook.com/popeye.nguyen.5
Số điện thoại : 01687773876
Nick k2pi, BoxMath : Popeye

Chương 1

Một số phương pháp và các loại hệ cơ bản

1.1 Các phương pháp chính để giải hệ phương trình

I. Rút x theo y hoặc ngược lại từ một phương trình

II. Phương pháp thế

1. Thế hằng số từ một phương trình vào phương trình còn lại
2. Thế một biểu thức từ một phương trình vào phương trình còn lại
3. Sử dụng phép thế đối với cả 2 phương trình hoặc thế nhiều lần.

III. Phương pháp hệ số bất định

1. Cộng trừ 2 phương trình cho nhau
2. Nhân hằng số vào các phương trình rồi đem cộng trừ cho nhau.
3. Nhân các biểu thức của biến vào các phương trình rồi cộng trừ cho nhau

IV. Phương pháp đặt ẩn phụ

V. Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

VI. Phương pháp lượng giác hóa

VII. Phương pháp nhân chia các phương trình cho nhau

VIII. Phương pháp đánh giá

1. Biến đổi về tổng các đại lượng không âm
2. Đánh giá sự ràng buộc trái ngược của ẩn, của biểu thức, của một phương trình
3. Đánh giá dựa vào tam thức bậc 2
4. Sử dụng các bất đẳng thức thông dụng để đánh giá

IX. Phương pháp phức hóa

X. Kết hợp các phương pháp trên

1.2 Một số loại hệ cơ bản

A. Hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn

I. Dạng $\begin{cases} ax+by=c \quad (a^2+b^2\neq 0) \\ a'x+b'y=c \quad (a'^2+b'^2\neq 0) \end{cases}$

II. Cách giải

1. Thế
2. Cộng đại số
3. Dùng đồ thị
4. Phương pháp định thức cấp 2

B. Hệ phương trình gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai

I. Dạng $\begin{cases} ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \\ a'x+b'y=c \end{cases}$

II. Cách giải: Thế từ phương trình bậc nhất vào phương trình bậc hai

C. Hệ phương trình đối xứng loại I

I. Dấu hiệu

Đổi vai trò của x và y cho nhau thì hệ đã cho không đổi

II. Cách giải:

Thường ta sẽ đặt ẩn phụ tổng tích $x+y=S, xy=P \quad (S^2\geq 4P)$

D. Hệ phương trình đối xứng loại II

I. Dấu hiệu

Đổi vai trò của x và y cho nhau thì phương trình này biến thành phương trình kia

II. Cách giải:

Thường ta sẽ trừ hai phương trình cho nhau

E. Hệ đẳng cấp

I. Dấu hiệu

Đẳng cấp bậc 2 $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$

Đẳng cấp bậc 3 $\begin{cases} ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=e \\ a'x^3+b'x^2y+c'xy^2+d'y^3=e' \end{cases}$

II. Cách giải:

Thường ta sẽ đặt $x=ty$ hoặc $y=tx$

Ngoài ra còn một loại hệ nữa tôi tạm gọi nó là bán đẳng cấp, tức là hoàn toàn có thể đưa về dạng đẳng cấp được .Loại hệ này không khó làm, nhưng nhìn nhận ra được nó cần phải khéo léo sắp xếp các hạng tử của phương trình lại. Tôi lấy một ví dụ đơn giản cho bạn đọc

Giải hệ : $\begin{cases} x^3-y^3=8x+2y \\ x^2-3y^2=6 \end{cases}$

Với hệ này ta chỉ việc nhân chéo vế với vế sẽ tạo thành đẳng cấp. Và khi đó ta có quyền chọn lựa giữa chia cả 2 vế cho y^3 hoặc đặt $x=ty$

Chương 2

Tuyển tập những bài hệ đặc sắc

2.1 Câu 1 đến câu 30

Câu 1 $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=13 \\ (x+y)(x^2-y^2)=25 \end{cases}$

Giải

Dễ dàng nhận thấy đây là một hệ đẳng cấp bậc 3, bình thường ta cứ nhân chéo lên rồi chia 2 vế cho x^3 hoặc y^3. Nhưng hãy xem một cách giải tinh tế sau đây:
Lấy $(2)-(1)$ ta được : $\quad 2xy(x-y)=12 \quad (3)$
Lấy $(1)-(3)$ ta được : $\quad (x-y)^3=1 \Leftrightarrow x=y+1$
Vì sao có thể có hướng này ? Xin thưa đó là dựa vào hình thức đối xứng của hệ. Ngon lành rồi. Thay vào phương trình đầu ta được

$$(y+1)^2+y^2=13 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-3 \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(3;2),(-2;-3)\square$

Câu 2 $\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y \\ x^2-3=3(y^2+1) \end{cases}$

Giải

Để ý như sau : Phương trình 1 gồm bậc ba và bậc nhất. Phương trình 2 gồm bậc 2 và bậc 0 (hằng số).
Rõ ràng đây là một hệ dạng nửa đẳng cấp. Ta sẽ viết lại nó để đưa về đẳng cấp
Hệ đã cho tương đương :

$$\begin{cases} x^3-y^3=8x+2y \\ x^2-3y^2=6 \end{cases}$$

Giờ ta nhân chéo hai vế để đưa nó về dạng đẳng cấp

$$\Leftrightarrow 6\left(x^3-y^3\right)=(8x+2y)\left(x^2-3y^2\right) \Leftrightarrow 2x(3y-x)(4y+x)=0$$

TH1 : $x = 0$ thay vào (2) vô nghiệm
TH2 : $x = 3y$ thay vào (2) ta có:

$$6y^2 = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1, x = 3 \\ y = -1, x = -3 \end{array} \right.$$

TH3 : $x = -4y$ thay vào (2) ta có:

$$13y^2 = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{\dfrac{6}{13}}, x = -4\sqrt{\dfrac{6}{13}} \\ y = -\sqrt{\dfrac{6}{13}}, x = 4\sqrt{\dfrac{6}{13}} \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm :$(x; y) = (3; 1), (-3; -1), \left(-4\sqrt{\dfrac{6}{13}}; \sqrt{\dfrac{6}{13}}\right), \left(4\sqrt{\dfrac{6}{13}}; -\sqrt{\dfrac{6}{13}}\right)$ $\square$

Câu 3 $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 3x + 4y = 1 \\ 3x^2 - 2y^2 - 9x - 8y = 3 \end{array} \right.$

Giải

Để ý khi nhân 3 vào PT(1) rồi trừ đi PT(2) sẽ chỉ còn y . Vậy

$$3.PT(1) - PT(2) \Leftrightarrow y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{2} \\ y = -4 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{2} \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{2}; 0\right), \left(\dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{2}; -4\right)$ $\square$

Câu 4 $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 19(x - y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x - y) \end{array} \right.$

Giải

Nhận xét vế trái đang có dạng bình phương thiếu, vậy ta thử thêm bớt để đưa về dạng bình phương xem sao. Nên đưa về $(x - y)^2$ hay $(x + y)^2$. Hiển nhiên khi nhìn sang vế phải ta sẽ chọn phương án đầu
Hệ đã cho tương đương $\left\{ \begin{array}{l} (x - y)^2 + 3xy = 19(x - y)^2 \\ (x - y)^2 + xy = 7(x - y) \end{array} \right.$
Đặt $x - y = a$ và $xy = b$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} b = 6a^2 \\ a^2 + b = 7a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, b = 0 \\ a = 1, b = 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = 3, y = 2 \\ x = -2, y = -3 \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm :$(x; y) = (0; 0)\,, (3; 2)\,(-2; -3)$ □

Câu 5 $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$

Giải

Hệ đối xứng loại I rồi. No problem!!!

Hệ đã cho tương đương $\begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) + (xy)^3 = 17 \\ (x+y) + xy = 5 \end{cases}$

Đặt $x + y = a$ và $xy = b$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} a^3 - 3ab + b^3 = 17 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, b = 3 \\ a = 3, b = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = 1 \\ x = 1, y = 2 \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 2), (2; 1)$□

Câu 6 $\begin{cases} x(x+2)(2x+y) = 9 \\ x^2 + 4x + y = 6 \end{cases}$

Giải

Đây là loại hệ đặt ẩn tổng tích rất quen thuộc

Hệ đã cho tương đương $\begin{cases} (x^2 + 2x)\,(2x + y) = 9 \\ (x^2 + 2x) + (2x + y) = 6 \end{cases}$

Đặt $x^2 + 2x = a$ và $2x + y = b$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} ab = 9 \\ a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 1 \\ x = -3, y = 9 \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 1), (-3; 9)$□

Câu 7 $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$

Giải

Không làm ăn gì được ở cả 2 phương trình, trực giác đầu tiên của ta là bình phương để phá sự khó chịu của căn thức

$$(2) \Leftrightarrow x+y+2+2\sqrt{xy+x+y+1}=16$$

Mà từ (1) ta có $x+y=3+\sqrt{xy}$ nên

$$(2) \Leftrightarrow 3+\sqrt{xy}+2+2\sqrt{xy+\sqrt{xy}+4}=16 \Leftrightarrow \sqrt{xy}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} xy=9 \\ x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=3$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(3;3)\square$

Câu 8 $\begin{cases} \sqrt{x+5}+\sqrt{y-2}=7 \\ \sqrt{x-2}+\sqrt{y+5}=7 \end{cases}$

Giải

Đối xứng loại II. Không còn gì để nói. Cho 2 phương trình bằng nhau rồi bình phương tung tóe để phá sự khó chịu của căn thức
Điều kiện : $x,y\geq 2$
Từ 2 phương trình ta có

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{y-2}=\sqrt{x-2}+\sqrt{y-5}$$
$$\Leftrightarrow x+y+3+2\sqrt{(x+5)(y-2)}=x+y+3+2\sqrt{(x-2)(y+5)}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+5)(y-2)}=\sqrt{(x-2)(y+5)} \Leftrightarrow x=y$$

Thay lại ta có

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}=7 \Leftrightarrow x=11$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(11;11)\square$

Câu 9 $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho có vẻ là nửa đối xứng nửa đẳng cấp, để ý bậc của PT(2) đang nhỏ hơn PT(1) một chút. Chỉ cần phép biến đổi bình phương (2) sẽ vừa biến hệ trở thành đẳng cấp vừa phá bỏ bớt đi căn
Điều kiện : $x,y\geq 0$
Hệ đã cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2(x^2+y^2)}+2\sqrt{xy}=16 \\ x+y+2\sqrt{xy}=16 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=x+y \Leftrightarrow x=y$$

Thay lại ta có : $2\sqrt{x}=4\Leftrightarrow x=4$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(4;4)\square$

Câu 10 $\begin{cases} 6x^2-3xy+x=1-y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

Giải

Một cách trực giác khi nhìn thấy hệ chứa tam thức bậc 2 đó là thử xem liệu có phân tích được thành nhân tử hay không ? Ta sẽ thử bằng cách tính Δ theo một ẩn có chính phương hay không. Ngon lành là PT(1) Δ_x đẹp như tiên.
Phương trình đầu tương đương $(3x-1)(2x-y+1)=0$
Với $x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow y=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
Với $y=2x+1\Rightarrow x^2+(2x+1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=1 \\ x=-\dfrac{4}{5}, y=\dfrac{-3}{5} \end{array}\right.$
Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1}{3};\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right),(0,1),\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{3}{5}\right)\square$

Câu 11 $\begin{cases} x-2y-\sqrt{xy}=0 \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{4y-1}=2 \end{cases}$

Giải

Phương trình đầu là dạng đẳng cấp rồi
Điều kiện $x\geq 1, y\geq\dfrac{1}{4}$
Từ phương trình đầu ta có : $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)=0\Leftrightarrow x=4y$
Thay vào (2) ta có

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x=2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(2;\dfrac{1}{2}\right)\square$

Câu 12 $\begin{cases} xy+x+y=x^2-2y^2 \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x\geq 1, y\geq 0$
Phương trình đầu tương đương

$$(x+y)(2y-x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=2y+1 \end{array}\right.$$

Với $x = -y$ loại vì theo điều kiện thì x, y phải cùng dấu
Với $x = 2y + 1$ thì phương trình 2 sẽ tương đương

$$(2y+1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 2y + 2 \Leftrightarrow \sqrt{2y}(y+1) = 2y + 2 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 5$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (5; 2)\square$

Câu 13 $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = 6 \\ x + y = 17 \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x, y \geq -1$
Hệ đã cho tương đương $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = 6 \\ (x+1) + (y+2) = 20 \end{cases}$
Đặt $\sqrt{x+1} = a \geq 0, \sqrt{y+2} = b \geq 0$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ a^2 + b^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4, b = 2 \\ a = 2, b = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15, y = 2 \\ x = 3, y = 14 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (15; 2), (3; 14)\square$

Câu 14 $\begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 \end{cases}$

Giải

Phương trình 2 tương đương

$$y^2 + (5x+4)(4-x) - 4xy - 8y = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 4xy - 8y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 2x + 4 \end{array}\right.$$

Với $y = 0$ thì suy ra : $(5x+4)(4-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -\dfrac{4}{5} \end{array}\right.$
Với $y = 2x + 4$ thì suy ra $(2x+4)^2 = (5x+4)(4-x) \Leftrightarrow x = 0$
Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (4; 0), \left(-\dfrac{4}{5}; 0\right), (0; 4)\square$

Câu 15 $\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^2+y=x(2y-1) \\ (x^2+y)^2+3x^2(1-2y)=0 \end{cases} \Rightarrow x^2(2y-1)^2+3x^2(2y-1)=0 \Leftrightarrow x^2(2y-1)(2y-4)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=0 \\ y=\dfrac{1}{2}(L) \\ y=2, x=1 \cup 2 \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;0),(1;2),(2;2)\square$

Câu 16 $\begin{cases} x+y+xy(2x+y)=5xy \\ x+y+xy(3x-y)=4xy \end{cases}$

Giải

$PT(1)-PT(2) \Leftrightarrow xy(2y-x)=xy \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=0 \\ x=2y-1 \end{array} \right.$

Với $xy=0 \Rightarrow x+y=0 \Leftrightarrow x=y=0$

Với $x=2y-1$

$$\Rightarrow (2y-1)+y+(2y-1)y(5y-2)=5(2y-1)y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1, x=1 \\ y=\dfrac{9-\sqrt{41}}{20}, x=-\dfrac{1+\sqrt{41}}{10} \\ y=\dfrac{9+\sqrt{41}}{20}, x=\dfrac{\sqrt{41}-1}{10} \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;0),(1;1),\left(-\dfrac{1+\sqrt{41}}{10};\dfrac{9-\sqrt{41}}{20}\right),\left(\dfrac{\sqrt{41}-1}{10};\dfrac{9+\sqrt{41}}{20}\right)\square$

Câu 17 $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ 2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+3) \end{cases}$

Giải

Nếu chỉ xét từng phương trình một sẽ không làm ăn được gì. Nhưng để ý 2 người này bị ràng buộc với nhau bởi con số 3 bí ẩn. Phép thế chăng ? Đúng vậy, thay 3 xuống dưới ta sẽ ra một phương trình đẳng cấp và kết quả đẹp hơn cả mong đợi

Thế 3 từ trên xuống dưới ta có

$$2x^3-9y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) \Leftrightarrow x^3=8y^3 \Leftrightarrow x=2y$$

$(1) \Leftrightarrow 3y^2=3 \Leftrightarrow y=\pm 1, x=\pm 2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(2;1),(-2;-1)\square$

Câu 18 $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=1+\sqrt{x^2-y^2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện :$x \geq y \geq 0$
Phương trình đầu tương đương

$$\sqrt{x+y}-1=\sqrt{x-y}\left(\sqrt{x+y}-1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+y}=1 \\ \sqrt{x-y}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{1-y} \\ x=\sqrt{1+y} \end{array}\right.$$

Từ đó $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-y}+\sqrt{y}=1 \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{y}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0, x=1 \\ y=1, x=0(L) \\ y=0, x=1 \end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;0)\square$

Câu 19 $\begin{cases} 2x-y=1+\sqrt{x(y+1)} \\ x^3-y^2=7 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x(y+1) \geq 0$
Từ (2) dễ thấy $x>0 \Rightarrow y \geq -1$
(1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y+1}\right)\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)=0 \Leftrightarrow x=y+1$
$\Rightarrow (y+1)^3-y^2=7 \Leftrightarrow y=1, x=2$
Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(2;1)\square$

Từ câu 20 trở đi tôi xin giới thiệu cho các bạn một phương pháp rất mạnh để giải quyết gọn đẹp rất nhiều các hệ phương trình hữu tỉ. Đó gọi hệ số bất định (trong đây tôi sẽ gọi nó bằng tên khác : UCT). Sẽ mất khoảng hơn chục ví dụ để diễn tả trọn vẹn phương pháp này

Trước hết điểm qua một mẹo phân tích nhân tử của đa thức hai biến rất nhanh bằng máy tính Casio. Bài viết của tác giả nthoangcute.

Ví dụ 1 : $A=x^2+xy-2y^2+3x+36y-130$
Thực ra đây là tam thức bậc 2 thì có thể tính Δ phân tích cũng được. Nhưng thử phân tích bằng Casio xem .
Nhìn thấy bậc của x và y đều bằng 2 nên ta chọn cái nào cũng được
Cho $y=1000$ ta được $A=x^2+1003x-1964130=(x+1990)(x-987)$
Cho 1990 = 2y – 10 và 987 = y – 13
$A=(x+2y-10)(x-y+13)\square$

Ví dụ 2 : $B=6x^2y-13xy^2+2y^3-18x^2+10xy-3y^2+87x-14y+15$

Nhìn thấy bậc của x nhỏ hơn, cho ngay y = 1000
$B = 5982x^2 - 12989913x + 1996986015 = 2991\,(2x - 333)\,(x - 2005)$
Cho 2991 = 3y – 9 ,333 = $\dfrac{y-1}{3}$, 2005 = 2y + 5
$B = (3y - 9)\left(2x - \dfrac{y-1}{3}\right)(x - 2y - 5) = (y-3)\,(6x - y + 1)\,(x - 2y - 5)$ □

Ví dụ 3 : $C = x^3 - 3xy^2 - 2y^3 - 7x^2 + 10xy + 17y^2 + 8x - 40y + 16$
Bậc của x và y như nhau
Cho $y = 1000$ ta được $C = x^3 - 7x^2 - 2989992x - 1983039984$
Phân tích C=$(x - 1999)\,(x + 996)^2$
Cho $1999 = 2y - 1$ và $996 = y - 4$
$C = (x - 2y + 1)\,(x + y - 4)^2$□

Ví dụ 4 : $D = 2x^2y^2 + x^3 + 2y^3 + 4x^2 + xy + 6y^2 + 3x + 4y + 12$
Bậc của x và y như nhau
Cho $y = 1000$ ta được $D = (x + 2000004)\,(x^2 + 1003)$
Cho $2000004 = 2y^2 + 4$ và $1003 = y + 3$
$D = (x + 2y^2 + 4)\,(x^2 + y + 3)$

Ví dụ 5 : $E = x^3y + 2x^2y^2 + 6x^3 + 11x^2y - xy^2 - 6x^2 - 7xy - y^2 - 6x - 5y + 6$
Bậc của y nhỏ hơn
Cho $x = 1000$ ta được $E = 1998999y^2 + 1010992995y + 5993994006 = 2997\,(667y + 333333)\,(y + 6)$
Ảo hóa E=$999\,(2001y + 999999)\,(y + 6)$
Cho $999 = x - 1, 2001 = 2y + 1, 999999 = x^2 - 1$
$E = (x - 1)\,(y + 6)\,(x^2 + 2xy + y - 1)$□

Ví dụ 6 : $F = 6x^4y + 12x^3y^2 + 5x^3y - 5x^2y^2 + 6xy^3 + x^3 + 7x^2y + 4xy^2 - 3y^3 - 2x^2 - 8xy + 3y^2 - 2x + 3y - 3$
Bậc của y nhỏ hơn
Cho $x = 1000$ ta được $F = 5997y^3 + 11995004003y^2 + 6005006992003y + 997997997$
Phân tích F=$(1999y + 1001001)\,(3y^2 + 5999000y + 997)$
Cho $1999 = 2x - 1, 1001001 = x^2 + x + 1, 5999000 = 6x^2 - x, 997 = x - 3$
$F = (x^2 + 2xy + x - y + 1)\,(6x^2y - xy + 3y^2 + x - 3)$ □

Làm quen được rồi chứ ? Bắt đầu nào

Câu 20
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{5} \\ 4x^2 + 3x - \dfrac{57}{25} = -y(3x+1) \end{cases}$$

Giải

Lời giải gọn đẹp nhất của bài trên là

$$25.PT(1) + 50.PT(2) \Leftrightarrow (15x + 5y - 7)(15x + 5y + 17) = 0$$

Đến đây dễ dàng tìm được nghiệm của hệ : $(x; y) = \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right), \left(\frac{11}{25}; \frac{2}{25}\right)$ $\square$

Câu 21 $\begin{cases} 14x^2 - 21y^2 - 6x + 45y - 14 = 0 \\ 35x^2 + 28y^2 + 41x - 122y + 56 = 0 \end{cases}$

Giải

Lời giải gọn đẹp nhất của bài này là

$$49.PT(1) - 15.PT(2) \Leftrightarrow (161x - 483y + 218)(x + 3y - 7) = 0$$

Và đến đây cũng dễ dàng tìm ra nghiệm $(x; y) = (-2; 3), (1; 2)$ $\square$

Qua 2 ví dụ trên ta đặt ra câu hỏi : Vì sao lại thế ? Cái nhóm thành nhân tử thì tôi không nói bởi ắt hẳn các bạn đã đọc nó ở trên rồi. Vì sao ở đây là tại sao lại nghĩ ra những hằng số kia nhân vào các phương trình, một sự tình cờ may mắn hay là cả một phương pháp. Xin thưa đó chính là một ví dụ của UCT. UCT là một công cụ rất mạnh có thể quét sạch gần như toàn bộ những bài hệ dạng là hai tam thức. Cách tìm những hằng số như thế nào. Tôi xin trình bày ngay sau đây. Bài viết của tác giả nthoangcute.

Tổng Quát: $\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases}$

Giải

Hiển nhiên nhận xét đây là hệ gồm hai tam thức bậc hai. Mà nhắc đến tam thức thì không thể không nhắc tới một đối tượng đó là Δ. Một tam thức phân tích được nhân tử hay không phải xem Δ_x hoặc Δ_y của nó có chính phương hay không. Nếu hệ loại này mà từ ngay một phương trình Δ ra kì diệu thì chẳng nói làm gì, thế nhưng cả hai phương trình Δ đều ra rất kì cục thì ta sẽ làm như nào. Khi đó UCT sẽ lên tiếng. Ta sẽ chọn hằng số thích hợp nhân vào một (hoặc cả hai phương trình) để ép sao cho Δ chính phương.

Như vậy phải tìm hằng số k sao cho $PT(1) + k.PT(2)$ có thể phân tích thành nhân tử
Đặt $a = a_1 + ka_2, b = b_1 + kb_2, c = c_1 + kc_2, d = d_1 + kd_2, e = e_1 + ke_2, f = f_1 + kf_2$
Số k là nghiệm của phương trình sau với a $\neq 0$

$$cde + 4abf = ae^2 + bd^2 + fc^2$$

Dạ vâng có hẳn một công thức để giải hệ phương trình loại này. Tác giả của nó khá xuất sắc !!!. Thử kiểm chứng lại ví dụ 21 nhé
$a = 14 + 35k, b = -21 + 28k, c = 0, d = -6 + 41k, e = 45 - 122k, f = -14 + 56k$
Số k sẽ là nghiệm của phương trình

$$4(14+35k)(-21+28k)(-14+56k) = (14+35k)(45-122k)^2+(-21+28k)(-6+41k)^2 \Leftrightarrow k = -\frac{15}{49}$$

Như vậy là $PT(1)-\dfrac{15}{49}.PT(2)$ hay $49.PT(1)-15.PT(2)$
Một chút lưu ý là không phải hệ nào cũng đầy đủ các hằng số. Nếu khuyết thiếu phần nào thì cho hằng số đó là 0. Ok!!
Xong dạng này rồi. Hãy làm bài tập vận dụng. Đây là những bài hệ tôi tổng hợp từ nhiều nguồn.

1. $\begin{cases} x^2+8y^2-6xy+x-3y-624=0 \\ 21x^2-24y^2-30xy-83x+49y+585=0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2+y^2-3x+4y=1 \\ 3x^2-2y^2-9x-8y=3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y^2=(4x+4)(4-x) \\ y^2-5x^2-4xy+16x-8y+16=0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} xy-3x-2y=16 \\ x^2+y^2-2x-4y=33 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ x^2+2xy-7x-5y+9=0 \end{cases}$
6. $\begin{cases} (2x+1)^2+y^2+y=2x+3 \\ xy+x=-1 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x^2+2y^2=2y-2xy+1 \\ 3x^2+2xy-y^2=2x-y+5 \end{cases}$
8. $\begin{cases} (x-1)^2+6(x-1)y+4y^2=20 \\ x^2+(2y+1)^2=2 \end{cases}$
9. $\begin{cases} 2x^2+4xy+2y^2+3x+3y-2=0 \\ x^2+y^2+4xy+2y=0 \end{cases}$
10. $\begin{cases} 2x^2+3xy=3y-13 \\ 3y^2+2xy=2x+11 \end{cases}$
11. $\begin{cases} 4x^2+3y(x-1)=7 \\ 3y^2+4x(y-1)=3 \end{cases}$
12. $\begin{cases} x^2+2=x(y-1) \\ y^2-7=y(x-1) \end{cases}$
13. $\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+3x=0 \\ xy+y^2+3y+1=0 \end{cases}$

Câu 22 $\begin{cases} x^3-y^3=35 \\ 2x^2+3y^2=4x-9y \end{cases}$

Giải

Lời giải ngắn gọn cho bài toán trên đó là

$$PT(1)-3.PT(2)\Leftrightarrow (x-2)^3=(y+3)^3\Leftrightarrow x=y+5$$

Thay vào (2) ta dễ dàng tìm ra nghiệm $(x;y)=(2;-3),(3;-2)$
Câu hỏi đặt ra ở đây là sử dụng UCT như thế nào ? Tất nhiên đây không phải dạng trên nữa rồi. Trước hết đánh giá cái hệ này đã

- Bậc của x và y là như nhau
- Các biến x,y độc lập với nhau
- Phương trình một có bậc cao hơn PT(2)

Những nhận xét trên đưa ta đến ý tưởng nhân hằng số vào PT(2) để $PT(1) + a.PT(2)$ đưa được về dạng hằng đẳng thức $A^3 = B^3$
$PT(1) + a.PT(2) \Leftrightarrow x^3 + 2ax^2 - 4ax - y^3 + 3ay^2 + 9ay - 35 = 0$
Cần tìm a sao cho vế trái có dạng $(x + \alpha)^3 - (y + \beta)^3 = 0$
Cân bằng ta được : $\begin{cases} \alpha^3 - \beta^3 = -35 \\ 3\alpha = 2a \\ 3\alpha^2 = -4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ \alpha = -2 \\ \beta = 3 \end{cases}$
Vậy $PT(1) - 3.PT(2) \Leftrightarrow (x - 2)^3 = (y + 3)^3$
OK ?? Thử một ví dụ tương tự nhé

Giải hệ: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 91 \\ 4x^2 + 3y^2 = 16x + 9y \end{cases}$

Gợi ý : $PT(1) - 3.PT(2) \Leftrightarrow (x - 4)^3 = (y + 3)^3$

Câu 23 $\begin{cases} x^3 + y^2 = (x - y)(xy - 1) \\ x^3 - x^2 + y + 1 = xy(x - y + 1) \end{cases}$

Giải

Hãy cùng tôi phân tích bài toán này. Tiếp tục sử dụng UCT
Đánh giá hệ :
-Bậc của x cao hơn bậc của y
-Các biến x,y không độc lập với nhau
-Hai phương trình có bậc cao nhất của x và y như nhau
Vì bậc x đang cao hơn bậc y và bậc của y tại 2 phương trình như nhau nên ta hãy nhân tung rồi viết lại 2 phương trình theo ẩn y. Cụ thể như sau :

$$\begin{cases} y^2(x + 1) - y(x^2 + 1) + x^3 + x = 0 \\ y^2x - y(x^2 + x - 1) + x^3 - x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Bây giờ ta mong ước rằng khi thay x bằng 1 số nào đó vào hệ này thì sẽ thu được 2 phương trình tương đương. Tức là khi đó các hệ số của 2 phương trình sẽ tỉ lệ với nhau . Vậy :

$$\frac{x + 1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 1} = \frac{x^3 + x}{x^3 - x^2 + 1} \Rightarrow x = 1$$

Rất may mắn ta đã tìm được x = 1. Thay x = 1 lại hệ ta có
$\begin{cases} 2(y^2 - y + 1) = 0 \\ y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2.PT(2) - PT(1)$ sẽ có nhân tử $x - 1$
Cụ thể đó là $(x - 1)(y^2 - (x + 3)y + x^2 - x - 2) = 0$
TH1 :$x = 1$ thay vào thì vô nghiệm
TH2: Kết hợp thêm với PT(1) ta được hệ mới :

$$\begin{cases} y^2 - (x + 3)y + x^2 - x - 2 = 0 \quad (3) \\ x^3 + y^2 - x^2y + x + xy^2 - y = 0 \end{cases}$$

Nhận xét hệ này có đặc điểm giống với hệ ban đầu đó là bậc y như nhau. Vậy ta lại viết lại hệ theo ẩn y và hi vọng nó sẽ lại đúng với x nào đó. Thật vậy, đó là $x = -\frac{1}{2}$. Tiếp tục thay nó vào hệ và ta sẽ rút ra :

$$2PT(2) - PT(1) \Leftrightarrow (2x+1)\left(y^2 - (x-1)\,y + x^2 - x + 2\right)$$

TH1 : $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{4}$
TH2 : Kết hợp với (3) ta được

$$\begin{cases} y^2 - (x-1)\,y + x^2 - x + 2 = 0 \\ y^2 - (x+3) + x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

Với hệ này ta chỉ việc trừ cho nhau sẽ ra $y = -1 \Rightarrow x^2 + 2 = 0$ (Vô nghiệm)
Vậy hệ đã cho có nghiệm :$(x;y) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5+3\sqrt{5}}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{5-3\sqrt{5}}{4}\right)\square$

Câu 24 $\begin{cases} 2\,(x+y)\,(25-xy) = 4x^2 + 17y^2 + 105 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y = 7 \end{cases}$

Giải

Hình thức bài hệ có vẻ khá giống với câu 23
Một chút đánh giá về hệ này
- Các biến x và y không độc lập với nhau
- Bậc cao nhất của x ở 2 phương trình như nhau , y cũng vậy

Với các đặc điểm này ta thử viết hệ thành 2 phương trình theo ẩn x và y và xem liệu hệ có đúng với x hoặc y nào không. Cách làm vẫn như câu 23. Viết theo x ta sẽ không tìm được y, nhưng viết theo y ta sẽ tìm được x = 2 khiến hệ luôn đúng. Thay x = 2 vào hệ ta được

$$\begin{cases} 21y^2 - 42y + 21 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow PT(1) - 21PT(2) \Leftrightarrow (x-2)\left(2y^2 + 2xy + 4y - 17x - 126\right) = 0$$

TH1 : $x = 2 \Rightarrow y = 1$
TH2 : $\begin{cases} 2y^2 + 2xy + 4y - 17x - 126 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0 \end{cases}$
Hệ này đã có cách giải rồi nhỉ ??
$3.PT(2) - PT(1) \Leftrightarrow (x-y+5)^2 + 2x^2 + x + 80 = 0$ (Vô nghiệm)
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (2;1)\square$

Tiếp theo chúng ta sẽ đến với câu VMO 2004.

Câu 25 $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$

Giải

Lời giải ngắn gọn nhất của bài trên đó là :

$$PT(1) + 3.PT(2) \Leftrightarrow (x+1)\left((x+1)^2 + 3(y-4)^2\right) = 0$$

Đến đây dễ dàng tìm ra nghiệm $(x; y) = (-1; 4), (-1; -4)\square$

Câu hỏi được đặt ra là bài này tìm hằng số như thế nào ? Có rất nhiều cách giải thích nhưng tôi xin trình bày cách giải thích của tôi :tuzki:
Làm tương tự theo như hai câu 23 và 24 xem nào. Viết lại hệ đã cho thành

$$\begin{cases} 3xy^2 + x^3 + 49 = 0 \\ y^2 + 8(x+1)y + x^2 - 17x = 0 \end{cases}$$

Một cách trực giác ta thử với $x = -1$. Vì sao ? Vì với $x = -1$ phương trình 2 sẽ không còn phần y và có vẻ 2 phương trình sẽ tương đương. Khi thay $x = -1$ hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} -3y^2 + 48 = 0 \\ y^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

Hai phương trình này tương đương. Trời thương rồi !! Vậy $x = -1$ chính là 1 nghiệm của hệ và từ hệ thứ hai ta suy ra ngay phải làm đó là $PT(1) + 3.PT(2)$. Việc còn lại chỉ là phân tích nốt thành nhân tử.

Tiếp theo đây chúng ta sẽ đến với một chùm hệ dị bản của ý tưởng trên. Tôi không trình bày chi tiết mà chỉ gợi ý và kết quả

Câu 26 $\begin{cases} y^3 + 3xy^2 = -28 \\ x^2 - 6xy + y^2 = 6x - 10y \end{cases}$

Gợi ý : $PT(1) + 3.PT(2) \Leftrightarrow (y+1)\left(3(x-3)^2 + (y+1)^2\right) = 0$
Nghiệm của hệ : $(x; y) = (3; -1), (-3; -1)\square$

Câu 27 $\begin{cases} 6x^2y + 2y^3 + 35 = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 + 2xy + 5x + 13y = 0 \end{cases}$

Gợi ý : $PT(1) + 3.PT(2) \Leftrightarrow (2y+5)\left(3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2\right) = 0$

Câu 28 $\begin{cases} x^3 + 5xy^2 = -35 \\ 2x^2 - 5xy - 5y^2 + x + 10y - 35 = 0 \end{cases}$

Gợi ý : $PT(1) + 2.PT(2) \Leftrightarrow (x-2)\left(5(y-1)^2 + (x+3)^2\right) = 0$

Câu 29 $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 6xy - 3x - 49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 10y - 25x - 9 \end{cases}$

Gợi ý : $PT(1) + 3.PT(2) \Leftrightarrow (x+1)\left((x+1)^2 + 3(y-5)^2\right) = 0$

Điểm qua các câu từ câu 23 đến câu 29 ta thấy dường như những câu hệ này khá đặc biệt. Phải đặc biệt thì những hệ số kia mới tỉ lệ và ta tìm được $x = \alpha$ hay $y = \beta$ là nghiệm của hệ. Thế với những bài hệ không có được may mắn như kia thì ta sẽ làm như nào. Tôi xin giới thiệu một phương pháp UCT rất mạnh. Có thể áp dụng rất tốt để giải nhiều bài hệ hữu tỉ (kể cả những ví dụ trên). Đó là phương pháp **Tìm quan hệ tuyến tính giữa x và y**. Và ta sẽ không chỉ nhân hằng số vào một phương trình mà thậm chí nhân cả một hàm $f(x)$ hay $g(y)$ vào nó. Tôi sẽ đưa ra vài ví dụ cụ thể sau đây :

Câu 30 $\begin{cases} 3x^2 + xy - 9x - y^2 - 9y = 0 \\ 2x^3 - 20x - x^2y - 20y = 0 \end{cases}$

Giải

Bài này nếu thử như câu 23, 24, 25 đều không tìm ra nổi x hay y bằng bao nhiêu là nghiệm của hệ. Vậy phải dùng phép dựng quan hệ tuyến tính giữa x và y. Quan hệ này có thể xây dựng bằng hai cách thường dùng sau :
- Tìm tối thiểu hai cặp nghiệm của hệ
- Sử dụng định lý về nghiệm của phương trình hữu tỉ

Trước hết tôi xin phát biểu lại định lý về nghiệm của phương trình hữu tỉ :
Xét đa thức : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
Đa thức có nghiệm hữu tỉ $\dfrac{p}{q} \Leftrightarrow$ ***p là ước của*** a_0 ***còn q là ước của*** a_n

OK rồi chứ ? Bây giờ ta hãy thử xây dựng quan hệ theo cách đầu tiên, đó là tìm tối thiểu hai cặp nghiệm của hệ (Casio lên tiếng :v)
Dễ thấy hệ trên có cặp nghiệm là $(0; 0$ và $(2; -1)$
Chọn hai nghiệm này lần lượt ứng với tọa độ 2 điểm, khi đó phương trình đường thẳng qua chúng sẽ là : $x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$

Như vậy quan hệ tuyến tính ở đây là $x = -2y$. Thay lại vào hệ ta được

$$\begin{cases} 9y\left(y+1\right) = 0 \\ -20y\left(y+1\right)\left(y-1\right) = 0 \end{cases}$$

Sau đó ta chọn biểu thức phù hợp nhất nhân vào 2 phương trình.
Ở đây sẽ là $20\left(y-1\right).PT(1) + 9.PT(2)$
Như vậy

$$20\left(y-1\right).PT(1) + 9.PT(2) \Leftrightarrow \left(x+2y\right)\left(18x^2 + 15xy - 60x - 10y^2 - 80y\right) = 0$$

TH1 : $x = -2y$ thay vào (1)
TH2 : Kết hợp thêm với PT(1) nữa thành một hệ gòm hai tam thức đã biết cách giải
Nghiệm của hệ :
$(x;y) = (0;0), (2;-1), (10;15), \left(\dfrac{15-\sqrt{145}}{2}; 11-\sqrt{145}\right), \left(\dfrac{15+\sqrt{145}}{2}; 11+\sqrt{145}\right) \square$

Sử dụng cách này chúng ta thấy, một hệ phương trình hữu tỉ chỉ cần tìm được một cặp nghiệm là ta đã xây dựng được quan hệ tuyến tính và giải quyết bài toán. Đây chính là ưu điểm của nó. Bạn đọc thử vận dụng nó vào giải những ví dụ từ 23 đến 29 xem. Tôi thử làm câu 25 nhé : Cặp nghiệm là $(-1;4), (-1;-4)$ nên quan hệ xây dựng ở đây là $x = -1$. Thay lại vào hệ và ta có hướng chọn hệ số để nhân.

Tuy nhiên cách này sẽ chịu chết với những bài hệ chỉ có một cặp nghiệm hoặc nghiệm quá lẻ không thể dò bằng Casio được. Đây là nhược điểm lớn nhất của nó

Nào bây giờ hãy thử xây dựng quan hệ bằng định lý nhé.

Với hệ này vì phương trình dưới đang có bậc cao hơn trên nên ta sẽ nhân a vào phương trình trên rồi cộng với phương trình dưới. Vì bậc của x đang cao hơn nên ta viết lại biểu thức sau khi thu gọn dưới dạng một phương trình biến x. Cụ thể đó là

$$2x^3 + \left(3a - y\right)x^2 + \left(ay - 9a - 20\right)x - y\left(ay + 9a + 20\right) = 0(*)$$

Nghiệm của (*) theo định lý sẽ là một trong các giá trị $\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{y}{2}, \pm y, ...\right\}$
Tất nhiên không thể có nghiệm $x = \pm\dfrac{1}{2}$ hay $x = \pm 1$ được. Hãy thử với hai trường hợp còn lại.
* Với $x = y$ thay vào hệ ta được $\begin{cases} 3y^2 - 18y = 0 \\ y^3 - 40y = 0 \end{cases}$
Khi đó ta sẽ phải lấy $(y^2 - 40).PT(1) - 3(y-6).PT(2)$. Rõ ràng là quá phức tạp. Loại cái này.
* Với $x = -y$ thay vào hệ ta được $\begin{cases} y^2 = 0 \\ -3y^3 = 0 \end{cases}$
Khi đó ta sẽ lấy $3y.PT(1) + PT(2)$. Quá đơn giản rồi. Khi đó biểu thức sẽ là

$$\left(x+y\right)\left(2x^2 + 6xy - \left(3y^2 + 27y + 20\right)\right) = 0$$

Cách số hai rất tốt để thay thế cách 1 trong trường hợp không tìm nổi cặp nghiệm. Tuy nhiên yếu điểm của nó là không phải hệ nào dùng định lý cũng tìm được nghiệm. Ta phải biết kết hợp nhuần nhuyễn hai cách với nhau. Và hãy thử dùng cách 2 làm các câu từ 23 đến 29 xem. Nó sẽ ra nghiệm là hằng số.

Làm một câu tương tự nữa. Tôi nêu luôn hướng giải.

2.2 Câu 31 đến câu 60

Câu 31 $\begin{cases} x^2y^2 + 3x + 3y - 3 = 0 \\ x^2y - 4xy - 3y^2 + 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$

Giải

$$PT(1) - (y-1).PT(2) \Leftrightarrow (x+y-1)\left(3y^2 + xy - 2y + 2\right) = 0$$

TH1 : $x = 1 - y$. No problem !!!

Th2 : $\begin{cases} 3y^2 + xy - 2y + 2 = 0 \\ x^2y - 4xy - 3y^2 + 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$

Đây lại là hệ đặc biệt, ta tìm được $x = 3$ là nghiệm của hệ. Thay vào và rút ra kết quả

$$\mathrm{PT}(1) + \mathrm{PT}(2) \Leftrightarrow (x-3)(xy-1) = 0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (0; 1), (1; 0)\square$

Bài viết về phương pháp UCT hay còn gọi là hệ số bất định kết thúc ở đây. Qua hơn chục câu ta đã thấy : sử dụng phương pháp UCT nâng cao (tìm quan hệ tuyến tính giữa các ẩn) là một phương pháp rất mạnh và rất tốt để giải quyết nhanh gọn các hệ phương trình hữu tỉ. Tuy nhiên nhược điểm của nó trong quá trình làm là khá nhiều. Thứ nhất : tính toán quá trâu bò và hại não. Hiển nhiên rồi, dựng quan hệ tuyến tính đã khó, sau đó còn phải nhọc công phân tích một đa thức hỗn độn thành nhân tử. Thứ hai, nếu sử dụng nó một cách thái quá sẽ khiến bản thân trở nên thực dụng, máy móc, không chịu mày mò suy nghĩ mà cứ nhìn thấy là lao đầu vào UCT, có khác gì lao đầu vào đá không ?

Một câu hỏi đặt ra. Liệu UCT có nên sử dụng trong các kì thi, kiểm tra hay không ? Xin thưa, trong những đề VMO, cũng lắm ý tưởng của họ là dùng UCT dạng cơ bản, tức là nhân hằng số thôi. UCT dạng cơ bản thì tôi không nói làm gì chứ UCT dạng nâng cao thì tốt nhất không nên xài trong các kì thi. Thứ nhất mất rất nhiều thời gian và sức lực. Thứ hai gây khó khăn và ức chế cho người chấm, họ hoàn toàn có thể gạch bỏ toàn bộ mặc dù có thể bạn làm đúng. Vậy nên : CÙNG ĐƯỜNG LẮM RỒI MỚI DÙNG NHÉ !! :D

Đây có lẽ là bài viết lớn nhất mà tôi kèm vào trong cuốn sách. Trong những câu tiếp theo tôi sẽ cài những bài viết nhỏ hơn vào. Đón xem nhé. Những câu tiếp theo có thể còn một số câu sử dụng phương pháp UCT. Vậy nên nếu thắc mắc cứ quay trở lại từ câu 20 mà xem. Tạm thời gác lại , ta tiếp tục đến với những câu tiếp theo.

Câu 32 $\begin{cases} x^5 + y^5 = 1 \\ x^9 + y^9 = x^4 + y^4 \end{cases}$

Giải

Nhận thấy rõ ràng đây là loại hệ bán đẳng cấp. Ta nhân chéo hai vế với nhau được

$$x^9 + y^9 = (x^4 + y^4)(x^5 + y^5) \Leftrightarrow x^4y^4(x + y) = 0$$

TH1 : $x = 0 \Rightarrow y = 1$
TH2 : $y = 0 \Rightarrow x = 1$
TH3 : $x = -y$ thay vào (1) rõ ràng vô nghiệm
Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 0), (0; 1)\square$

Câu 33 $\begin{cases} x^3 + 2xy^2 = 12y \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases}$

Giải

Lại thêm một hệ cùng loại, nhân chéo hai vế cho nhau ta được

$$x^3 + 2xy^2 = y(8y^2 + x^2) \Leftrightarrow x = 2y$$

Khi đó (2) sẽ tương đương

$$12y^2 = 12 \Leftrightarrow y = \pm 1, x = \pm 2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 1), (-2; -1)\square$

Câu 34 $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x + y} = 1 \\ \sqrt{x + y} = x^2 - y \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x + y > 0$
Rõ ràng không làm ăn được từ phương trình (2). Thử biến đổi phương trình (1) xem

$$(1) \Leftrightarrow (x + y)^2 - 1 + \frac{2xy}{x + y} - 2xy = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1)(x + y - 1) - \frac{2xy(x + y - 1)}{x + y} = 0$$

Có nhân tử chung rồi. Với $x + y = 1$ thay vào (2) ta được

$$1 = (1 - y)^2 - y \Leftrightarrow y = 0, y = 3$$

Giờ ta xét trường hợp còn lại. Đó là $x+y+1=\dfrac{2xy}{x+y}$

$$\Leftrightarrow x+y+1=1-x^2-y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+x+y=0$$

Rõ ràng sai vì từ điều kiện đã cho ngay $x+y>0$
Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;0),(-2;3)\square$

Câu 35 $\begin{cases} x^3-y^3=3(x-y^2)+2 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$
Thường thì bài này người ta sẽ làm như sau. Để ý phương trình (1) một chút

$$(1)\Leftrightarrow x^3-3x=(y-1)^3-3(y-1)$$

Xét $f(t)=t^3-3t$ với $-1\le t\le 1$ thì $f'(t)=3t^2-3\le 0$
Suy ra $f(t)$ đơn điệu và từ đó suy ra $x=y-1$ thay vào (2)
Cách này ổn. Tuy nhiên thay vào làm vẫn chưa phải là nhanh. Hãy xem một cách khác rất mới mẻ mà tôi làm

$$(2)\Leftrightarrow x^2+\sqrt{1-x^2}+2=3\sqrt{2y-y^2}\Leftrightarrow f(x)=g(y)$$

Xét $f(x)$ trên miền $[-1;1]$ ta sẽ tìm được $3\le f(x)\le \dfrac{13}{4}$

Ta lại có : $g(y)=3\sqrt{y(2-y)}\le 3\dfrac{y+2-y}{2}=3$

Vậy $f(x)\ge g(y)$. Dấu bằng xảy ra khi
$\begin{cases} y=1 \\ x=\pm 1, x=0 \end{cases}$ Thay vào phương trình đầu chỉ có cặp $(x;y)=(0;1)$ là thỏa mãn
Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;1)\square$

Câu 36 $\begin{cases} x^3-3x=y^3-3y \\ x^6+y^6=1 \end{cases}$

Giải

Dễ thấy phương trình (1) cần xét hàm rồi, tuy nhiên $f(t)=t^3-3t$ lại không đơn điệu, cần phải bó thêm điều kiện. Ta sẽ dùng phương trình (2) để có điều kiện. Từ (2) dễ thấy $-1\le x,y\le 1$.
Với điều kiện đó rõ ràng $f(t)$ đơn điệu giảm và suy ra được $x=y$
Thay vào (2) ta được

$$2x^6=1\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm :$(x;y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}};\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}};-\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)\square$

Câu 37 $\begin{cases} x^3(2+3y)=1 \\ x(y^3-2)=3 \end{cases}$

Giải

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 3y+1=\dfrac{1}{x^3} \\ \dfrac{3}{x}+2=y^3 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{1}{x}$$

Thay lại (1) ta có

$$2x^3+3x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=-1 \\ x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=2 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm :$(x;y)=(-1;-1),\left(\dfrac{1}{2};2\right)$ $\square$

Câu 38 $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 \end{cases}$

Giải

Sử dụng UCT sẽ thấy $y=0$ là nghiệm của hệ. Thay lại và ta sẽ có

$$2PT(1)+PT(2) \Leftrightarrow y(x+y+5)(x+y-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ x=-5-y \\ x=3-y \end{array}\right.$$

Với $y=0$ thay lại vô nghiệm
Với $x=-5-y$ khi đó phương trình (1) sẽ tương đương

$$(y+5)^2+y^2-y^2-5y+1=4y \Leftrightarrow VL$$

Tương tự với $x=3-y$ cũng vô nghiệm
Vậy hệ đã cho vô nghiệm $\square$

Câu 39 $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = \dfrac{y}{2} \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \leq min\{\pm x\}$
Ta không nên đặt ẩn tổng hiệu vì vẫn còn sót lại $\frac{y}{2}$ sẽ làm bài toán khó khăn hơn. Một cách trực giác ta bình phương (1) lên. Từ (1) ta suy ra

$$2x - 2\sqrt{x^2 - y^2} = \frac{y^2}{4}$$

Đến đây nhìn thấy $\sqrt{x^2 - y^2}$ theo (2) bằng 3. Vậy suy ra

$$2x - 6 = \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow y^2 = 8x - 24$$

Thay vào (2) ta được

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow y = 0(TM) \\ x = 5 \Rightarrow y = 4(TM) \\ x = 5 \Rightarrow y = -4(TM) \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (3; 0), (5; 4), (5; -4)$□

Câu 40 $\begin{cases} x - \sqrt{y+1} = \dfrac{5}{2} \\ y + 2(x-3)\sqrt{x+1} = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x, y \geq -1$
Không tìm được mối quan hệ cụ thể nào. Tạm thời ta đặt ẩn để dễ nhìn
Đặt $\sqrt{x+1} = a \geq 0$, $\sqrt{y+1} = b \geq 0$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a^2 - 1 - b = \dfrac{5}{2} \\ b^2 - 1 + 2a(a^2 - 4) = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Ta thế $b = \frac{7}{2} - a^2$ từ (1) vào (2) và có :

$$\left(\frac{7}{2} - a^2\right)^2 + 2a(a^2 - 4) - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -3 \Rightarrow b = \dfrac{11}{2}(L) \\ a = -2 \Rightarrow b = \dfrac{1}{2}(L) \\ a = 1 \Rightarrow b = -\dfrac{5}{2}(TM) \\ a = 2 \Rightarrow b = \dfrac{1}{2}(L) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(0; -\frac{3}{4}\right)$ □

Câu 41 $\begin{cases} (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 185 \\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 65 \end{cases}$

Giải

Thoạt nhìn qua thì thấy đây là một hệ đẳng cấp bậc 3 rõ ràng. Tuy nhiên nếu tinh ý ta đem cộng 2 phương trình cho nhau sẽ chỉ còn lại x^2+y^2
Cộng 2 phương trình cho nhau ta có

$$2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 250 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 5$$

Khi đó thay lại hệ ta có

$$\begin{cases} (25+xy).5 = 185 \\ (25-xy).5 = 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 12 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, y=4 \\ x=4, y=3 \\ x=-3, y=-4 \\ x=-4, y=-3 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = (3;4), (4;3), (-3;-4), (-4;-3)$□

Câu 42 $\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $xy \geq 0$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{xy}} = \dfrac{7+\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \\ \sqrt{xy}(x+y) = 78 \end{cases}$$

Đặt $x+y = a$, $\sqrt{xy} = b$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a-b=7 \\ ab=78 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=13 \\ b=6 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-6 \\ b=-13 \end{cases} (L) \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=13 \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9, y=4 \\ x=4, y=9 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = (9;4), (4;9)$□

Câu 43 $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 - x + 4y = 0 \end{cases}$

Giải

Dùng UCT

$$PT(1) - 3.PT(3) \Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+2)^3 \Leftrightarrow x = y + 3$$

Đến đây dễ dàng tìm nghiệm $(x; y) = (1; -2), (2; -1)\square$

Câu 44 $\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$

Giải

Đây là một hệ hay. Ta hãy tìm cách loại bỏ $18y^3$ đi. Vì $y = 0$ không là nghiệm nên (2) tương đương

$$72x^2y^2 + 108xy = 18y^3$$

Đến đây ý tưởng rõ ràng rồi chứ ? Thế $18y^3$ từ (1) xuống và ta thu được

$$8x^3y^3 - 72x^2y^2 - 108xy + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = -\dfrac{3}{2} \\ xy = \dfrac{21 - 9\sqrt{5}}{4} \\ xy = \dfrac{21 + 9\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$$

Thay vào (1) ta sẽ tìm được y và x

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0(L) \\ y = \sqrt[3]{\dfrac{8(xy)^3 + 27}{18}} = -\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{5} - 3\right) \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}\left(3 - \sqrt{5}\right) \\ y = \sqrt[3]{\dfrac{8(xy)^3 + 27}{18}} = \dfrac{3}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right) \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}\left(3 + \sqrt{5}\right) \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{1}{4}\left(3 - \sqrt{5}\right); -\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{5} - 3\right)\right), \left(\dfrac{1}{4}\left(3 + \sqrt{5}\right); \dfrac{3}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)\right)\square$

Câu 45 $\begin{cases} (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5 \\ (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=9 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $xy \neq 0$
Ta cứ nhân ra đã. Hệ tương đương

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=2, y+\dfrac{1}{y}=3 \\ x+\dfrac{1}{x}=3, y+\dfrac{1}{y}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}, y=1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(1;\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2};1\right)$ □

Câu 46 $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18 \\ x(x+1)y(y+1)=72 \end{cases}$

Giải

Một bài đặt ẩn tổng tích cũng khá đơn giản
Đặt $x^2+x=a$, $y^2+y=b$. Ta có

$$\begin{cases} a+b=18 \\ ab=72 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=12, b=6 \\ a=6, b=12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x=6 \\ y^2+y=12 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+x=12 \\ y^2+y=6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, x=-3 \\ y=3, y=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3, x=-4 \\ y=2, y=-3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có cả thảy 8 nghiệm □

Câu 47 $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^3 - 16x = y\left(y^2 - 4\right) \\ y^2 - 4 = 5x^2 \end{cases}$$

Như vậy phương trình (1) sẽ là

$$x^3 - 16x = 5x^2y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = \pm 2 \\ y = \dfrac{x^2 - 16}{5x} \end{array}\right.$$

Trường hợp 2 thay vào (2) sẽ là

$$\frac{\left(x^2 - 16\right)^2}{25x^2} - 4 = 5x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -\dfrac{64}{31} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = -3 \\ x = -1, y = 3 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (0; 2), (0; -2), (1; -3), (-1; 3)\square$

Câu 48 $\begin{cases} x + \sqrt{y^2 - x^2} = 12 - y \\ x\sqrt{y^2 - x^2} = 12 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y^2 \geq x^2$

Để ý $x\sqrt{y^2 - x^2}$ sinh ra từ việc ta bình phương (1). Vậy thử bám theo hướng đó xem. Từ (1) ta suy ta

$$x^2 + y^2 - x^2 + 2x\sqrt{y^2 - x^2} = (12 - y)^2$$
$$\Leftrightarrow y^2 + 24 = (12 - y)^2 \Leftrightarrow y = 5$$

Thay vào (2) ta có

$$x\sqrt{25 - x^2} = 12 \Leftrightarrow x = 3, x = 4$$

Đối chiếu lại thấy thỏa mãn

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (3; 5), (4; 5)\square$

Câu 49 $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \\ x^2y+x^2+2y-22=0 \end{cases}$

Giải

Để ý nếu đặt $x^2=a$ thì hệ đã cho biến thành hệ tam thức bậc 2 ta hoàn toàn đã biết cách giải. Cụ thể ở đây sẽ là

$$PT(1)+2.PT(2) \Leftrightarrow (x^2+y)^2-2(x^2+y)-35=0$$

TH1 : $x^2+y=7 \Leftrightarrow x^2=7-y$ thay (2) ta có

$$(7-y)y+7-y+2y-22=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \Rightarrow x=\pm 2 \\ y=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

TH2 : $x^2+y=-5 \Leftrightarrow x^2=5-y$. Hoàn toàn tương tự thay (2) sẽ cho y vô nghiệm
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(2;3),(-2;3),(\sqrt{2};5),(-\sqrt{2};5)\square$

Câu 50 $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy+y^2x=-\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Giải

Đây là câu Tuyển sinh khối A - 2008. Một cách tự nhiên khi gặp hình thức này là ta tiến hành nhóm các số hạng lại
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} (x^2+y)+xy+(x^2+y)xy=-\dfrac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Đến đây hướng đi đã rõ ràng. Đặt $x^2+y=a$, $xy=b$ ta có

$$\begin{cases} a+b+ab=-\dfrac{5}{4} \\ a^2+b=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, b=-\dfrac{5}{4} \\ a=-\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y=0 \\ xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y=-\dfrac{1}{2} \\ xy=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}, y=-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}} \\ x=1, y=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\right),\left(1;-\dfrac{3}{2}\right)\square$

Câu 51 $\begin{cases} x^2+1+y(y+x)=4y \\ (x^2+1)(x+y-2)=y \end{cases}$

Giải

Hệ gần như chỉ là câu chuyện của x^2+1 và $x+y$. Tuy nhiên y chen vào đã khiến hệ trở nên khó chịu. Hãy diệt y đi đã. Cách tốt nhất đó là chia khi mà $y=0$ không phải là nghiệm của hệ. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+x+y-2=2 \\ \dfrac{x^2+1}{y}(x+y-2)=1 \end{cases}$$

Hướng đi rõ ràng. Đặt $\dfrac{x^2+1}{y}=a$, $x+y-2=b$

Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=2 \\ x=-2, y=5 \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;2),(-2;5)\square$

Câu 52 $\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$

Giải

Loại hệ này không khó. Ý tưởng ta sẽ chia để biến vế phải trở thành hằng số
Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x^2}+\dfrac{y^2}{x}=6 \\ \dfrac{1}{x^2}+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x}+y\right)=6 \\ \left(\dfrac{1}{x}+y\right)^2-2\dfrac{y}{x}=5 \end{cases}$$

Đặt $\dfrac{y}{x}=a, \dfrac{1}{x}+y=b$. Hệ trở thành

$$\begin{cases} ab=6 \\ b^2-2a=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ \dfrac{1}{x}+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=2 \\ x=\dfrac{1}{2}, y=1 \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;2),\left(\dfrac{1}{2};1\right)\square$

Câu 53 $\begin{cases} x^2+2y^2=xy+2y \\ 2x^3+3xy^2=2y^2+3x^2y \end{cases}$

Giải

Để ý một chút đây là hệ bán đẳng cấp. Nếu ta viết lại như sau

$$\begin{cases} x^2+2y^2-xy=2y \\ 2x^3+3xy^2-3x^2y=2y^2 \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$2y^2(x^2+2y^2-xy)=2y\left(2x^3+3xy^2-3x^2y\right)\Leftrightarrow 4y\left(y-x\right)\left(x^2-xy+y^2\right)=0$$

TH1 : $y=0\Rightarrow x=0$
TH2 : $x=y=0$
TH3 : $x=y$ thay vào (1) ta được

$$2y^2=2y\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ x=y=1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;0),(1;1)\square$

Câu 54 $\begin{cases} 2x^2y+y^3=2x^4+x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y\geq -1$
Khai thác từ (1). Có vẻ như là hàm nào đó. Chọn chia cho phù hợp ta sẽ được mục đích, ở đây sẽ chia cho x^3 vì $x=0$ không là nghiệm của hệ. PT(1) khi đó sẽ là

$$2\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^3=2x+x^3\Leftrightarrow \frac{y}{x}=x\Leftrightarrow y=x^2$$

Thay vào (2) ta sẽ được

$$(x+2)\sqrt{x^2+1}=(x+1)^2\Rightarrow (x+2)^2\left(x^2+1\right)=(x+1)^4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3},y=3(TM) \\ x=-\sqrt{3},y=3(TM) \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(\pm\sqrt{3};3)\square$

Ta sẽ đến một câu tương tự nó

Câu 55 $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq -\dfrac{5}{4}$

Thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ. Chia 2 vế của (1) cho y^5 ta được

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2$$

Thay vào (2) ta được

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; \pm 1)\square$

Câu 56 $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$

Giải

Đây là câu Tuyển sinh khối B - 2009. Các giải thông thường nhất đó là chia (1) cho y, chia (2) cho y^2 sau khi kiểm tra $y = 0$ không phải là nghiệm. Ta sẽ được

$$\begin{cases} x + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y} = 7 \\ \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 - b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4, b = 3 \\ a = -5, b = 12 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 4 \\ x = 3y \end{cases} \\ \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = -5 \\ x = 12y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = \dfrac{1}{3} \\ x = 3, y = 1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(1; \dfrac{1}{3}\right), (3; 1)\square$

Tiếp tục ta đến thêm một câu tuyển sinh nữa

Câu 57 $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$

Giải

Để ý thật kĩ nếu ta thế khéo léo xy lên (1) sẽ chỉ còn lại phương trình ẩn x. Dù sẽ là bậc 4 nhưng liều thì ăn nhiều. Hệ viết lại

$$\begin{cases} x^4 + 2x^2(xy) + x^2y^2 = 2x + 9 \\ xy = \dfrac{6x + 6 - x^2}{2} \end{cases}$$

Từ đó (1) sẽ tương đương

$$x^4 + x^2(6x + 6 - x^2) + \left(\frac{6x + 6 - x^2}{2}\right)^2 = 2x + 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{17}{4} \\ VL \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(-4; \dfrac{17}{4}\right)$ □

Câu 58 $\begin{cases} \sqrt[3]{1 + x} + \sqrt{1 - y} = 2 \\ x^2 - y^4 + 9y = x(9 + y - y^3) \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \leq 1$
Không làm ăn gì được từ (1). Xét (2). Để ý 1 tẹo thì (2) có thể phân tích được thành

$$(x - y)(9 - x - y^3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 9 - y^3 \end{array}\right.$$

Với $x = y$ thay vào (1) ta sẽ được

$$\sqrt[3]{1 + y} + \sqrt{1 - y} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a^3 + b^2 = 2 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, b = 1 \\ a = -1 - \sqrt{3}, b = 3 + \sqrt{3} \\ a = \sqrt{3} - 1, b = 3 - \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 6\sqrt{3} - 11 \\ y = -6\sqrt{3} - 11 \end{array}\right.$$

Với $x = 9 - y^3$ thay vào (1) ta sẽ được

$$\sqrt[3]{10 - y^3} + \sqrt{1 - y} = 2$$

Ta có

$$\sqrt[3]{10 - y^3} + \sqrt{1 - y} \geq \sqrt[3]{9} > 2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (0; 0), (6\sqrt{3} - 11; 6\sqrt{3} - 11), (-6\sqrt{3} - 11; -6\sqrt{3} - 11)$□

Câu 59 $\begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{1-y} = \sqrt{y} \\ 2\sqrt{y}\sqrt{x-1} - \sqrt{y} = -1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq 1, 0 \leq y \leq 1$
Thoạt nhìn bài toán ta thấy như lạc vào mê cung những căn thức. Tuy nhiên chỉ với những đánh giá khá đơn giản ta có thể chém đẹp bài toán
Viết lại phương trình (2) như sau

$$2\sqrt{y}\sqrt{x-1} = \sqrt{y} - 1$$

Từ điều kiện dễ thấy $VT \geq 0 \geq VP$
Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$
Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$□

Câu 60 $\begin{cases} x\sqrt{17-4x^2} + y\sqrt{19-9y^2} = 3 \\ \sqrt{17-4x^2} + \sqrt{19-9y^2} = 10 - 2x - 3y \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $-\frac{\sqrt{17}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{17}}{2}, -\frac{\sqrt{19}}{3} \leq y \leq \frac{\sqrt{19}}{3}$
Bài toán này xuất hiện trên Đề thi thử lần 2 page Yêu Toán học và tôi là tác giả của nó. Ý tưởng của nó khá đơn giản, phù hợp với 1 đề thi tuyển sinh
Để ý $x\sqrt{17-4x^2}$ liên quan đến $2x$ và $\sqrt{17-4x^2}$, $y\sqrt{19-9y^2}$ liên quan đến $3y$ và $19-9y^2$. Và tổng bình phương của chúng là những hằng số. Đấy là cơ sở để ta đặt ẩn
Đặt $2x + \sqrt{17-4x^2} = a$, $3x + \sqrt{19-9y^2} = b$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a + b = 10 \\ \dfrac{a^2-17}{4} + \dfrac{b^2-19}{6} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5, b = 5 \\ a = 3, b = 7 \end{array} \right.$$

TH1 : $\begin{cases} 2x + \sqrt{17-4x^2} = 5 \\ 3y + \sqrt{19-9y^2} = 5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 2 \end{array} \right. \\ y = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{6} \end{cases}$

TH2 : $\begin{cases} 2x + \sqrt{17-4x^2} = 3 \\ 3y + \sqrt{19-9y^2} = 7 \end{cases}$ (Loại)

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right) \left(\frac{1}{2}; \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right) \left(2; \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right) \left(2; \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)$□

Và đây là ý tưởng gốc của nó. Hình thức đơn giản hơn một chút

2.3 Câu 61 đến câu 90

Câu 61 $\begin{cases} x\sqrt{5-x^2}+y\sqrt{5-4y^2}=1 \\ \sqrt{5-x^2}+\sqrt{5-4y^2}=x-2y \end{cases}$

Nghiệm : $(x;y)=(1;-1),\left(2;-\dfrac{1}{2}\right)$ □

Câu 62 $\begin{cases} x^3-xy^2+y^3=1 \\ 4x^4-y^4=4x-y \end{cases}$

Giải

Rõ ràng là một hệ đưa về được dạng đẳng cấp bằng cách nhân chéo vế với vế. Tuy nhiên, bài này nếu sử dụng phép thế tốt ta sẽ đưa về một kết quả khá đẹp mắt
Phương trình (2) tương đương

$$4x(x^3-1)=y(y^3-1)$$

Đến đây ta rút x^3-1 và y^3-1 từ (1). Cụ thể từ (1) ta có

$$\begin{cases} x^3-1=y^3-y^2x \\ y^3-1=xy^2-x^3 \end{cases}$$

Thay tất cả xuống (2) và ta thu được

$$4xy^2(y-x)=-xy(x^2-y^2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x=y \\ 4y=y+x \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=1 \\ x=1 \\ x=y=1 \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}},x=\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;1),(1;0),(1;1),\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}};\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}}\right)$ □

Câu 63 $\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{17}{4} \\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x\neq\pm\sqrt{x^2-y^2}$, $x^2-y^2\geq 0$, $x^2+xy+4\geq 0$
Hình thức bài hệ có vẻ khá khủng bố nhưng những ý tưởng thì đã lộ hết. Ta có thể khai thác cả 2 phương trình. Pt(1) có nhiều cách xử lí : đẳng cấp, đặt ẩn, liên hợp. Tôi sẽ xử lí theo hướng số 3. (1) khi đó sẽ là

$$\frac{\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}{x^2-(x^2-y^2)}+\frac{\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}{x^2-(x^2-y^2)}=\frac{17}{4}\Leftrightarrow\frac{2\left(2x^2-y^2\right)}{y^2}=\frac{17}{4}\Leftrightarrow y=\pm\frac{4x}{5}$$

Tiếp tục khai thác (2). Dễ thấy đặt $\sqrt{x^2+xy+4}=t\geq 0$ thì (2) trở thành

$$t^2+t=56\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=7\\t=-8(L)\end{array}\right.\Rightarrow x^2+xy=45$$

Kết hợp lại ta được

$$\left\{\begin{array}{l}y=\pm\dfrac{4}{5}x\\x^2+xy=45\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5,y=-4\\x=5,y=4\\x=-15,y=12\\x=15,y=-12\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(-5;-4),(5;4),(-15;12),(15;-12)\square$

Câu 64 $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2\\\sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1\end{array}\right.$

Giải

Điều kiện : $x,y\geq 0$, $\sqrt{y}\leq min\{\pm x\}$, $\sqrt{x}\leq min\{\pm y\}$
Không tìm được mối liên hệ gì từ cả hai phương trình, ta tiến hành bình phương nhiều lần để phá vỡ toàn bộ căn thức khó chịu. Phương trình (1) tương đương

$$2x+2\sqrt{x^2-y}=4\Leftrightarrow\sqrt{x^2-y}=2-x\Rightarrow x^2-y=x^2-4x-4\Leftrightarrow 4x-y=4$$

Làm tương tự phương trình (2) ta sẽ có : $4x-4y=-1$. Kết hợp 2 kết quả lại dễ dàng tìm được x,y

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{17}{12};\dfrac{5}{3}\right)\square$

Câu 65 $\left\{\begin{array}{l}x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y\\y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x\end{array}\right.$

Giải

Hình thức của bài hệ là đối xứng. Tuy nhiên biểu thức khá cồng kềnh và lại nhận xét thấy $x=y=1$ là nghiệm của hê. Có lẽ sẽ đánh giá
Cộng 2 phương trình lại ta có

$$x^2+y^2=2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\right)$$

Từ đó ta nhận xét để có nghiệm thì $xy\geq 0$ và để ý là $\sqrt[3]{t^2-2t+9}\geq 2$ nên ta đánh giá

$$x^2+y^2\leq 2xy\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow(x-y)^2\leq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $(x;y) = (1;1)$ $\square$

Câu 66 $\begin{cases} 6\dfrac{x}{y} - 2 = \sqrt{3x-y} + 3y \\ 2\sqrt{3x + \sqrt{3x-y}} = 6x + 3y - 4 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \neq 0$, $3x \geq y$, $3x + \sqrt{3x-y} \geq 0$
Phương trình (1) khi đó sẽ tương đương

$$6x - 2y = y\sqrt{3x-y} + 3y^2 \Leftrightarrow 2\left(3x-y\right) - y\sqrt{3x-y} - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x-y} = -y \\ \sqrt{3x-y} = \dfrac{3y}{2} \end{array}\right.$$

TH1 : $\sqrt{3x-y} = -y$. Từ đây suy ra $y \leq 0$ và $3x = y^2 + y$ thay tất cả vào (2) ta được

$$2\sqrt{y^2+y-y} = 2\left(y^2+y\right) + 3y - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 7y - 4 = 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -4 \Rightarrow x = 4$$

TH2 : $\sqrt{3x-y} = \dfrac{3y}{2}$. Từ đây suy ra $y \geq 0$ và $3x = \dfrac{9y^2}{4} + y$ thay tất cả vào (2) ta cũng sẽ tìm được $y = \dfrac{8}{9} \Rightarrow x = \dfrac{8}{9}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = (-4;4), \left(\dfrac{8}{9};\dfrac{8}{9}\right)$ $\square$

Câu 67 $\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 \\ \sqrt[3]{x+2} + 2\sqrt{y+2} = 5 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \leq 2, y \geq \dfrac{1}{2}$
Phương trình (1) tương đương

$$(2-x)\sqrt{2-x} + \sqrt{2-x} = (2y-1)\sqrt{2y-1} + \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow f(\sqrt{2x-1}) = f(\sqrt{2y-1})$$

Với $f(x) = x^3 + x$ đơn điệu tăng. Từ đó suy ra $\sqrt{2-x} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow x = 3 - 2y$ thay vào (2) ta có

$$\sqrt[3]{5-2y} + 2\sqrt{y+2} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 5 \\ a^3 + 2b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, b = 2 \\ a = \dfrac{-3-\sqrt{65}}{4}, b = \dfrac{23+\sqrt{65}}{8} \\ a = \dfrac{\sqrt{65}-3}{4}, b = \dfrac{23-\sqrt{65}}{8} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \dfrac{233+23\sqrt{65}}{32} \\ y = \dfrac{233-23\sqrt{65}}{32} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm

$(x;y) = (-1;2), \left(\dfrac{23\sqrt{65}-185}{16}; \dfrac{233-23\sqrt{65}}{32}\right)\left(-\dfrac{23\sqrt{65}+185}{16}; \dfrac{233+23\sqrt{65}}{32}\right)\square$

Sử dụng tính đơn điệu của hàm số cũng là một hướng khá phổ biến trong giải hệ phương trình. Chỉ cần khéo léo nhìn ra dạng của hàm, ta có thể rút ra những điều kì diệu từ những phương trình không tầm thường chút nào

Câu 68 $\begin{cases} \sqrt{1+xy}+\sqrt{1+x+y} = 2 \\ x^2y^2 - xy = x^2+y^2+x+y \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $xy \geq -1$, $x+y \geq -1$
Một chút biến đổi phương trình (2) ta sẽ được

$$x^2y^2+xy = (x+y)^2+x+y \Leftrightarrow (xy-x-y)(xy+x+y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y = xy \\ x+y = -xy-1 \end{array}\right.$$

TH1 : $xy = x+y$ thay vào (1) ta được

$$2\sqrt{1+xy} = 2 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

TH2 : $x+y = -xy-1$ thay vào (1) ta được

$$\sqrt{1+xy}+\sqrt{-xy} = 2(VL)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (0;0)\square$

Câu 69 $\begin{cases} x + \dfrac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \dfrac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$

Giải

Tôi không nhầm thì bài toán này đã xuất hiện trên THTT, tuy nhìn hình thức của hệ khá đẹp mắt và gọn nhẹ nhưng không hề dễ giải một chút nào. Hướng làm tối ưu của bài này đó là phức hóa. Dựa vào ý tưởng hệ khá đối xứng đồng thời dưới mẫu như là bình phương của Mođun mà ta sử dụng cách này. Hướng giải như sau
PT(1)+i.PT(2) ta sẽ được

$$x+yi+\frac{3(x-yi)-(xi+y)}{x^2+y^2} = 0$$

Đặt $z = x + yi$ khi đó phương trình trở thành

$$z + \frac{3\overline{z} - i\overline{z}}{|z|^2} = 3 \Leftrightarrow z + \frac{3\overline{z} - i\overline{z}}{z.\overline{z}} = 3 \Leftrightarrow z + \frac{3-i}{z} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2+i \\ z = 1-i \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 1), (1; -1)\square$
Hình thức của những bài hệ này khá dễ nhận thấy. Thử làm một số câu tương tự nhé.

Câu 70 $\begin{cases} x + \dfrac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} = 7 \\ y + \dfrac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$

Câu 71 $\begin{cases} x + \dfrac{5x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \dfrac{x + 5y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$

Câu 72 $\begin{cases} x + \dfrac{16x - 11y}{x^2 + y^2} = 7 \\ y - \dfrac{11x + 16y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$

Câu 73 $\begin{cases} (6 - x)(x^2 + y^2) = 6x + 8y \\ (3 - y)(x^2 + y^2) = 8x - 6y \end{cases}$

Gợi ý : Chuyển hệ đã cho về dạng

$$\begin{cases} x + \dfrac{6x + 8y}{x^2 + y^2} = 6 \\ y + \dfrac{8x - 6y}{x^2 + y^2} = 3 \end{cases}$$

Nghiệm : $(x; y) = (0; 0), (2; 1), (4; 2)\square$

Phức hóa là một phương pháp khá hay để giải hệ phương trình mang tính đánh đố cao. Không chỉ với loại hệ này mà trong cuốn sách tôi sẽ còn giới thiệu một vài câu hệ khác cũng sử dụng phức hóa khá đẹp mắt.

Câu 74 $\begin{cases} 4x^2y^2 - 6xy - 3y^2 = -9 \\ 6x^2y - y^2 - 9x = 0 \end{cases}$

Giải

Đây là một bài toán cũng khá đẹp mắt. Thấy $x = 1$ là nghiệm của hệ . Ta suy ra

$$PT(1) + PT(2) \Leftrightarrow (x-1)(4y^2(x+1) + 6xy - 9) = 0$$

TH1 : $x = 1 \Rightarrow y = 3$
TH2 : $4y^2(x+1) + 6xy - 9 = 0$
Vì $x = 0$ không là nghiệm. Suy ra $4y^2x(x+1) + 6x^2y - 9x = 0$ (*)
Vì sao nhân x vào đấy. UCT chăng ? Tôi chỉ giới thiệu cho các bạn UCT nâng cao thôi chứ tôi chả dùng bao giờ. Lí do chỉ đơn giản tôi muốn xuất hiện $6x^2y - 9x = y^2$ từ (2) thôi

Vậy (*) $\Leftrightarrow 4y^2x(x+1) + y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2(2x+1)^2 = 0$
TH1 : $y = 0$ vô nghiệm
TH2 : $x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 3, y = -\dfrac{3}{2}$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 3), \left(-\dfrac{1}{2}; 3\right), \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$ $\square$

Câu 75 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{(y+1)^2} + \dfrac{y^2}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{2} \\ 3xy = x + y + 1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x, y \neq -1$
Bài toán này có khá nhiều cách giải. Tôi xin giới thiệu cách đẹp đẽ nhất của bài này
Áp dụng Bất đẳng thức $AM - GM$ cho vế trái của (1) ta có

$$VT \geq \frac{2xy}{(x+1)(y+1)} = \frac{2xy}{xy + x + y + 1} = \frac{2xy}{xy + 3xy} = \frac{1}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $(x; y) = (1; 1), \left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$ $\square$

Câu 76 $\begin{cases} 3y^2 + 1 + 2y(x+1) = 4y\sqrt{x^2 + 2y + 1} \\ y(y-x) = 3 - 3y \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x^2 + 2y + 1 \geq 0$
Không làm ăn gì được từ (2). Thử biến đổi (1) xem sao. PT(1) tương đương

$$4y^2 - 4y\sqrt{x^2 + 2y + 1} + x^2 + 2y + 1 = x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow \left(2y - \sqrt{x^2 + 2y + 1}\right)^2 = (x-y)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2y+1} = 3y - x \\ \sqrt{x^2+2y+1} = x + y \end{array} \right.$$

Có vẻ hơi ảo nhỉ ? Nhưng để ý một chút thì (1) có vóc dáng của các hằng đẳng thức nên ta nghĩ đến hướng này

Bây giờ xử lí hai trường hợp kia thế nào ? Chắc bình phương thôi. Tốt quá ! Phương trình sẽ chỉ còn lại xy và y mà những cái đó thì (2) đã có cả

TH1 : $\sqrt{x^2+2y+1} = 3y - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq x \\ x^2+2y+1 = 9y^2 - 6xy + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq x \\ 6xy = 9y^2 - 2y - 1 \\ xy = y^2 + 3y - 3(2) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 1(TM) \\ x = \dfrac{415}{51}, y = \dfrac{17}{3}(TM) \end{array} \right.$$

TH2 : $\sqrt{x^2+2y+1} = x + y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y \geq 0 \\ x^2+2y+1 = x^2 + 2xy + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2xy = -y^2 + 2y + 1 \\ xy = y^2 + 3y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 1 \\ x = \dfrac{41}{21}, y = -\dfrac{7}{3}(L) \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1), \left(\dfrac{415}{51}; \dfrac{17}{3}\right)$ □

Như chúng ta đã biết. Tam thức bậc hai có khá nhiều ứng dụng trong giải toán và hệ cũng không phải là ngoại lệ. Chỉ với những đánh giá khá đơn giản : đặt điều kiện của Δ để tam thức có nghiệm mà ta có thể tìm ra cực trị của các ẩn. Từ đó đánh giá và giải quyết những bài toán mà các phương pháp thông thường cũng bó tay. Loại hệ sử dụng phương pháp này thường cho dưới hai dạng chính. Thứ nhất : cho một phương trình là tam thức, một phương trình là tổng hoặc tích của hai hàm $f(x)$ và $g(y)$. Thứ hai : cho cả 2 phương trình đều là phương trình bậc hai của 1 ẩn nào đó. Hãy thử lướt qua một chùm hệ loại này nhé.

Câu 77 $\begin{cases} x^4 + y^2 = \dfrac{698}{81} \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$

Giải

Hình thức của hệ : một phương trình là tam thức bậc hai một có dạng $f(x) + g(y)$ và một số khá khủng bố. Ta hãy khai thác phương trình (2) bằng cách đánh giá Δ

Viết lại phương trình (2) dưới dạng sau

$$\begin{cases} x^2 + (y-3)x + (y-2)^2 = 0(*) \\ y^2 + (x-4)y + x^2 - 3x + 4 = 0(**) \end{cases}$$

Để (*) có nghiệm thì $\Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow (y-3)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \dfrac{7}{3}$

Để (**) có nghiệm thì $\Delta_y \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)^4 - 4(x^2 - 3x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{4}{3}$

Từ điều kiện chặt của hai ẩn giờ ta xét (1) và có một đánh giá như sau

$$x^4 + y^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^4 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{697}{81} < \frac{698}{81}$$

Vậy hệ đã cho vô nghiệm □

Thử một câu tương tự nhé

Câu 78 $\begin{cases} x^3 + y^2 = \dfrac{50}{27} \\ x^2 + xy + y^2 - y = 1 \end{cases}$

Giải

Làm tương tự và từ (1) ta sẽ rút ra $x^3 + y^2 \le \dfrac{49}{27} < \dfrac{50}{27}$

Câu 79 $\begin{cases} (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) = 18 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$

Giải

Hình thức khá quen thuộc nhưng phương trình đầu cho ở dạng $f(x).f(y)$. Chả sao ! Cứ làm như ban nãy.
Từ phương trình (2) bằng đánh giá quen thuộc ta rút ra

$$\begin{cases} 2 \le x \le \dfrac{10}{3} \\ 1 \le y \le \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Điều kiện trên đủ để $f(x)$ và $f(y)$ đơn điệu tăng vì $f'(x) = 4x - 3 > 0$ với x như trên
Vậy ta có

$$f(2).f(1) \le f(x).f(y) \le f\left(\frac{10}{3}\right).f\left(\frac{7}{3}\right) \Leftrightarrow 18 \le f(x).f(y) \le \frac{10366}{81}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$ và $y = 1$ thay lại vào (2) thấy không thỏa.
Vậy hệ đã cho vô nghiệm □

Câu 80 $\begin{cases} (2x^2 - 1)(2y^2 - 1) = \dfrac{7}{2}xy \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$

Giải

Một chút biến đổi ta sẽ đưa về giống câu 79
Nhận thấy $x = y = 0$ không là nghiệm của hệ. Chia cả 2 vế phương trình (1) cho xy và ta sẽ được

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)\left(2y - \frac{1}{y}\right) = \frac{7}{2}$$

Quen thuộc rồi nhỉ. Bài này vẫn vô nghiệm $\square$

Câu 81 $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0 \end{cases}$

Giải

Hình thức bài hệ có vẻ khá gọn nhẹ nhưng không dễ gì giải được bằng các cách thông thường. Nhưng để ý cả hai phương trình đều là bậc hai với ẩn x. Vậy nên giả sử có nghiệm x thì rõ ràng $\Delta_x \geq 0$
Như vậy từ cả hai phương trình ta có

$$\begin{cases} 1 - y^4 \geq 0 \\ 4 - 2(3 + y^3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ y \leq -1 \end{cases} \Rightarrow y = -1$$

Thay lại và ta sẽ tìm được $x = 1$
Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; -1)\square$

OK ? Tôi sẽ đưa thêm 3 ví dụ nữa để các bạn test

Câu 82 $\begin{cases} x^2 - 2x + 2 - y^2 = 0 \\ x^2y^3 - 2x + y = 0 \end{cases}$

Nghiệm : $(x; y) = (1; 1)\square$

Câu 83 $\begin{cases} x^2y^2 - x^2 + 4y^2 - 12x = 4 \\ 2x^2 + 2y^2 - 8x + 9y + 18 = 0 \end{cases}$

Nghiệm : $(x; y) = (2; -2)\square$

Câu 84 $\begin{cases} x^2y^2 - 8x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 10 + y^3 = 0 \end{cases}$

Nghiệm : $(x; y) = (1; -2)\square$

Nắm rõ rồi chứ ? Tiếp tục đến với các câu tiếp theo.

Câu 85 $\begin{cases} (x+1)(y+1)+1=(x^2+x+1)(y^2+y+1) \\ x^3+3x+(x^3-y+4)\sqrt{x^3-y+1}=0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x^3-y+1\geq 0$
Thoạt nhìn bài toán có vẻ dễ dàng khi để ý một chút thì (2) có dạng hàm số. Tuy nhiên đấy vẫn chưa phải là nút thắt. Đây là một bài toán yêu cầu khả năng xử lí phương trình bậc cao tốt. Tạm thời ta xử lí (2) trước đã.

Đặt $\sqrt{x^3-y+1}=t$ khi đó phương trình (2) sẽ là

$$x^3+3x+t^3+3t=0\Leftrightarrow x^3+3x=(-t)^3+3(-t)\Leftrightarrow t=-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 0 \\ y=x^3-x^2+1 \end{cases}$$

Điều kiện $x\leq 0$ khá quan trọng. Nó giúp ta có đánh giá tốt hơn sau đây

$$PT(1)\Leftrightarrow 1=x^2y+x^2+y^2x+y^2+x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow 1=x^2(x^3-x^2+1)+x^2+x(x^3-x^2+1)^2+(x^3-x^2+1)^2+x^2(x^3-x^2+1)^2$$
$$\Leftrightarrow x^8-x^7+2x^5+x^2+x=0$$

TH1 : $x=0\Rightarrow y=1$ (TM)
TH2 : $x^7+2x^4+x=x^6-1$

$$\Leftrightarrow x(x^3+1)^2=(x^3-1)(x^3+1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\rightarrow y=-1(TM) \\ x^4-x^3+x+1=0(*) \end{array}\right.$$

$$(*)\Leftrightarrow x^4+x+1=x^3\Leftrightarrow x^4-x^2+\frac{1}{4}+x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=x^3$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=x^3$$

Do $VT>0\geq VP$ nên vô nghiệm
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(0;1),(-1;-1)\square$

Câu 86 $\begin{cases} x^3(4y^2+1)+2(x^2+1)\sqrt{x}=6 \\ x^2y(2+2\sqrt{4y^2+1})=x+\sqrt{x^2+1} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x\geq 0$
Hình thức của bài hệ rõ ràng là khá rắc rối. Tuy nhiên, để ý ở (2) nếu ta chia cả 2 vế cho x^2 thì sẽ cô lập được x và y và hi vọng sẽ ra được điều gì.
Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm. Chia 2 vế của (2) cho x^2 ta được

$$2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$$

Rõ ràng 2 vế đều có dạng $f(t) = t + t\sqrt{t^2+1}$ và hàm này đơn điệu tăng. Vậy từ đó ta suy ra được $2y = \dfrac{1}{x}$ thay vào (1) ta có

$$x^3\left(\frac{1}{x^2}+1\right) + 2(x^2+1)\sqrt{x} = 6$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x + 2(x^2+1)\sqrt{x} = 6$$

Rõ ràng vế trái đơn điệu tăng với điều kiện của x. Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ □

Câu 87 $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 \end{cases}$

Giải

Đây là câu trong đề VMO 2000-2001. Không hẳn là một câu quá khó
Điều kiện : $y \le min\{-2x; -7x\}$
Xuất hiện hai căn thức vậy thử đặt $\sqrt{7x+y} = a$, $\sqrt{2x+y} = b$ xem
Nhưng còn $x - y$ thì thế nào ? Chắc sẽ liên quan đến a^2, b^2. Vậy ta sử dụng đồng nhất thức

$$x - y = k(7x+y) + l(2x+y) \Leftrightarrow k = \frac{3}{5}, l = -\frac{8}{5}$$

Vậy hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ b + \dfrac{3a^2}{5} - \dfrac{8b^2}{5} = 2 \\ a, b \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{15-\sqrt{77}}{2} \\ b = \dfrac{\sqrt{77}-5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + y = \dfrac{151-15\sqrt{77}}{2} \\ 2x + y = \dfrac{51-5\sqrt{77}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - \sqrt{77} \\ y = \dfrac{11-\sqrt{77}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(10-\sqrt{77}; \dfrac{11-\sqrt{77}}{2}\right)$ □

Một cách khác cũng khá tốt. Đặt $\sqrt{7x+y} = a, \sqrt{2x+y} = b$ và ta xây dựng một hệ tạm sau

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 - b^2 = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = x \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{5-x}{2}$$

Thay vào (2) và ta được

$$\frac{5-x}{2} + x - y = 2 \Leftrightarrow x = 2y - 1$$

Đến đây thay lại vào (2) và ta cũng ra kết quả

Một ví dụ tương tự của bài này

Câu 88 $\begin{cases} \sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1 \\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3 \end{cases}$

Nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{37}{20};\dfrac{81}{10}\right)$ □

Câu 89 $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$

Giải

Đây là câu trong đề VMO 1995-1996. Một ý tưởng khá đẹp mắt mà sáng tạo
Điều kiện : $x,y\geq 0, x+y>0$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{\sqrt{3x}} \\ 1-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \\ 1=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+y}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+y}=\frac{1}{3x}-\frac{8}{7y} \Leftrightarrow 21xy=(x+y)(7y-3x)$$

$$\Leftrightarrow (y-6x)(7y+4x)=0 \Leftrightarrow y=6x$$

Thay vào phương trình đầu ta được

$$1+\frac{1}{7x}=\frac{2}{\sqrt{3x}} \Leftrightarrow x=\frac{11+4\sqrt{7}}{21} \Rightarrow y=\frac{22}{7}+\frac{8}{\sqrt{7}}$$

Một cách khác có thể sử dụng trong bài này đó là phức hóa. Nó mới xuất hiện gần đây
Đặt $\sqrt{x}=a>0$, $\sqrt{y}=b>0$. Ta có hệ mới như sau

$$\begin{cases} a+\dfrac{a}{a^2+b^2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ b-\dfrac{b}{a^2+b^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

$$PT(1)+i.PT(2) \Leftrightarrow (a+bi)+\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i$$

Đặt $z=a+bi$ phương trình đã cho trở thành

$$z+\frac{1}{z}=\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i \Rightarrow z \Rightarrow a,b \Rightarrow x,y$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{11+4\sqrt{7}}{21};\dfrac{22}{7}+\dfrac{8}{\sqrt{7}}\right)\square$

Bài hệ này có khá nhiều dị bản phong phú. Tôi xin giới thiệu cho các bạn

Câu 90 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{3}\left(1+\dfrac{6}{x+y}\right)=\sqrt{2}\\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{6}{x+y}\right)=1\end{cases}$

Nghiệm : $(x;y)=(8;4)\square$

2.4 Câu 91 đến câu 120

Câu 91 $\begin{cases}\sqrt{x}\left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)=2\\ \sqrt{y}\left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)=6\end{cases}$

Nghiệm : $(x;y)=(4+2\sqrt{3};12+6\sqrt{3})\square$

Câu 92 $\begin{cases}\sqrt{10x}\left(1+\dfrac{3}{5x+y}\right)=3\\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{3}{5x+y}\right)=1\end{cases}$

Nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{2}{5};4\right)\square$

Câu 93 $\begin{cases}\sqrt[4]{x}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}\right)=2\\ \sqrt[4]{y}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}\right)=1\end{cases}$

Tiếp theo ta đến một vài ví dụ về sử dụng phương pháp lượng giác hóa trong giải hệ phương trình

Câu 94 $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1 \\ (1-x)(1+y)=2 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$

Điều kiện này cho ta ý tưởng lượng giác hóa. Đặt $x = sina$, $y = sinb$ với $a, b \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Phương trình đầu tương đương

$$sinacosb + sinbcosa = 1 \Leftrightarrow sin(a+b) = 1 \Leftrightarrow a+b = \frac{\pi}{2}$$

Phương trình (2) tương đương

$$(1-sina)(1+sinb) = 2 \Leftrightarrow (1-sina)(1+cosa) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\frac{\pi}{2} \\ a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \pi \\ b = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, y = 0 (L) \\ x = 0, y = 1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (0; 1)\square$

Câu 95 $\begin{cases} 2y = x(1-y^2) \\ 3x - x^3 = y(1-3x^2) \end{cases}$

Giải

Thoạt nhìn ta thấy có vẻ hệ này cũng xoàng, chả có gì khi viết nó dưới dạng

$$\begin{cases} xy^2 = x - 2y \\ x^3 - 3x^2y = 3x - y \end{cases}$$

Đưa nó về dạng đẳng cấp, nhưng cái chính ở đây là nghiệm nó quá lẻ. Vậy thử hướng khác xem. Viết lại hệ đã cho sau khi đã xét

$$\begin{cases} x = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ y = \dfrac{3x - x^3}{1-3x^2} \end{cases}$$

Nhìn biểu thức vế phải có quen thuộc không ? Rất giống công thức lượng giác nhân đôi và nhân ba của *tan*. Vậy ý tưởng đã nảy ra

Đặt $x = tan\alpha$ với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Từ PT(2) ta sẽ có

$$y = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} = \tan 3\alpha$$

Mà như thế theo (1) ta sẽ có

$$x = \frac{2\tan 3\alpha}{1 - \tan^2 3\alpha} = \tan 6\alpha$$

Từ đó suy ra

$$\tan\alpha = \tan 6\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{5} \Leftrightarrow \alpha = \left\{-\frac{2\pi}{5}; -\frac{\pi}{5}; 0; \frac{\pi}{5}; \frac{2\pi}{5}\right\}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\tan\dfrac{\pm 2\pi}{5}; \tan\dfrac{\pm 6\pi}{5}\right), \left(\tan\dfrac{\pm\pi}{5}; \tan\dfrac{\pm 3\pi}{5}\right), (0;0)\square$

Làm một bài tương tự nhé.

Câu 96 $\begin{cases} y = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \\ x = \dfrac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \end{cases}$

Sử dụng phương pháp lượng giác hóa trong giải hệ phương trình cần phải nắm rõ các hằng đẳng thức, đẳng thức, công thức lượng giác, và cần một nhãn quan tốt để phát hiện một biểu thức nào đó giống với một công thức lượng giác.

Câu 97 $\begin{cases} x^3y(1+y) + x^2y^2(2+y) + xy^3 - 30 = 0 \\ x^2y + x(1+y+y^2) + y - 11 = 0 \end{cases}$

Giải

Đây là một hệ khá mạnh nhưng hay. Nhìn vào 2 phương trình ta thấy các biến "kết dính" với nhau khá tốt và hằng số có vẻ như chỉ là kẻ đứng ngoài. Vậy hãy vứt hằng số sang một bên và thực hiện biến đổi vế trái. Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} xy(x+y)(x+y+xy) = 30 \\ xy(x+y) + x + y + xy = 11 \end{cases}$$

Đến đây ý tưởng đã rõ ràng. Đặt $a = xy(x+y)$, $b = xy + x + y$ và hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} ab = 30 \\ a + b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5, b = 6 \\ a = 6, b = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy(x+y) = 5 \\ xy + x + y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} xy(x+y) = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\text{TH1}: \begin{cases} xy(x+y) = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} (L) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = 1 \\ x = 1, y = 2 \end{array}\right.$$

$$\text{TH2}: \begin{cases} xy(x+y) = 5 \\ xy + x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = 5 \\ x + y = 1 \end{cases} (L) \\ \begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}, y = \dfrac{5+\sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}, y = \dfrac{5-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (1;2),(2;1),\left(\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2};\dfrac{5\mp\sqrt{21}}{2}\right)$ □

Tác giả của nó đã rất khéo léo trộn nhiều lần cách đặt ẩn tổng tích vào một hệ, gây nhiều khó khăn cho người làm

Câu 98 $\begin{cases}\sqrt{\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}}+\sqrt{\cos^2 y+\dfrac{1}{\cos^2 y}}=\sqrt{\dfrac{20y}{x+y}}\\ \sqrt{\sin^2 y+\dfrac{1}{\sin^2 y}}+\sqrt{\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\sqrt{\dfrac{20x}{x+y}}\end{cases}$

Giải

Bài toán xuất hiện trong đề VMO 2012-2013. Hình thức bài hệ có sự khác lạ khi có cả hàm lượng giác chen chân vào. Với kiểu hệ này đánh giá là cách tốt nhất
Ta sẽ cộng hai phương trình với nhau và sẽ chứng minh $VT \geq 2\sqrt{10} \geq VP$
Áp dụng Bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ cho vế phải ta được

$$\sqrt{\frac{20y}{x+y}}+\sqrt{\frac{20x}{x+y}} \leq \sqrt{2\left(\frac{20y}{x+y}+\frac{20x}{x+y}\right)}=2\sqrt{10}$$

Giờ ta sẽ chứng minh : $VT \geq 2\sqrt{10}$ tức là phải chứng minh

$$\sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}}+\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}} \geq \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{\left(\sin x-\frac{1}{\sin x}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\cos x-\frac{1}{\cos x}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} \\ &\geq \sqrt{\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}-(\sin x+\cos x)\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Hiển nhiên ta có $sinx + cosx \leq \sqrt{2}$ nên

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}-(\sin x+\cos x) \geq \frac{4}{\sin x+\cos x}-\sqrt{2} \geq \frac{4}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

Vậy $VT \geq \sqrt{2+8}=\sqrt{10}$. Tương tự với biến y và ta có điều phải chứng minh
Đẳng thức xảy ra khi $x=y=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$□

Câu 99 $\begin{cases} x\sqrt{x}-\sqrt{x}=y\sqrt{y}+8\sqrt{y} \\ x-y=5 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x,y \geq 0$
Ô hệ này cho một phương trình đơn giản quá. Thế thẳng lên (1) chăng ? Không nên ! Biến đổi 1 tẹo đã rồi hãy thế. Hướng biến đổi khá đơn giản là làm phá vỡ căn thức
Phương trình (1) tương đương

$$\sqrt{x}(x-1)=\sqrt{y}(y+8) \Rightarrow x(x-1)^2=y(y+8)^2$$

Đến đây thực hiện thế $x=y+5$ lên (1) và ta được

$$(y+5)(y+4)^2=y(y+8)^2 \Leftrightarrow y=4 \Rightarrow x=9$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(9;4)\square$

Câu 100 $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{y}+2 \\ y\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3x^2+3} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x>0, y\neq 0$
Rõ ràng với điều kiện này thì từ (2) ta thấy ngay để có nghiệm thì $y>0$
Phương trình (1) tương đương

$$\frac{\sqrt{x}+y}{x}=\frac{2\left(\sqrt{x}+y\right)}{y} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}+y=0(L) \\ y=2x \end{array}\right.$$

Với $y=2x$ thay vào (2) ta được

$$2x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3x^2+3} \Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{3}\right)\sqrt{x^2+1}=2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=\frac{2x}{2x-\sqrt{3}}$$

Rõ ràng vế trái đơn điệu tăng và vế phải đơn điệu giảm nên phương trình này có nghiệm duy nhất $x=\sqrt{3} \Rightarrow y=2\sqrt{3}$
Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(\sqrt{3};2\sqrt{3})\square$

Câu 101 $\begin{cases} y = -x^3 + 3x + 4 \\ x = 2y^3 - 6y - 2 \end{cases}$

Giải

Hình thức bài hệ khá gọn nhẹ nhưng cũng đủ khiến nhiều người phải lúng túng. Nhận xét $x = y = 2$ là nghiệm. Ta tiến hành tách như sau

$$\begin{cases} y - 2 = -(x+1)^2(x-2) \\ x - 2 = (y+1)^2(y-2) \end{cases}$$

Đến đây nhân chéo vế với vế ta được

$$2(y-2)^2(y+1)^2 = -(x+1)^2(x-2)^2$$

Dễ thấy $VT \geq 0 \geq VP$. Ở đây đẳng thức xảy ra khi $x = y = 2\square$

Câu 102 $\begin{cases} x^3 - xy^2 + 2000y = 0 \\ y^3 - yx^2 - 500x = 0 \end{cases}$

Giải

Dễ dàng đưa được về hệ đẳng cấp. Nhưng ta biến đổi một tẹo để nó tối ưu.
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x\left(x^2 - y^2\right) = -2000y \\ y(x^2 - y^2) = -500x \end{cases} \Rightarrow 500x^2(x^2 - y^2) = 2000y^2(x^2 - y^2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \\ x = 2y \\ x = -2y \end{array}\right.$$

Thay lại với mỗi trường hợp vào (1) và ta được

$$\left[\begin{array}{l} y = 0, x = 0 \\ y = 10\sqrt{\dfrac{10}{3}}, x = -20\sqrt{\dfrac{10}{3}} \\ y = -10\sqrt{\dfrac{10}{3}}, x = 20\sqrt{\dfrac{10}{3}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (0; 0), \left(\pm 20\sqrt{\dfrac{10}{3}}; \mp 10\sqrt{\dfrac{10}{3}}\right)$ $\square$

Câu 103 $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+2\dfrac{y}{x}=1 \\ x^2+y^2+4\dfrac{x}{y}=22 \end{cases}$

Giải

Ý tưởng đặt ẩn phụ đã rõ ràng. Đặt $x^2+y^2-1=a$, $\dfrac{y}{x}=b$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{3}{a}+2b=1 \\ a+\dfrac{4}{b}=21 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=7, b=\dfrac{2}{7} \\ a=9, b=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=8 \\ 2x=7y \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x=3y \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=\pm 4\sqrt{\dfrac{2}{53}}, x=\pm 14\sqrt{\dfrac{2}{53}} \\ x=\pm 3, y=\pm 1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(\pm 3;\pm 1)\left(\pm 14\sqrt{\dfrac{2}{53}};\pm 4\sqrt{\dfrac{2}{53}}\right)\square$

Câu 104 $\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3 \\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=8 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y\neq 0, x+\dfrac{1}{y}\geq 0, x+y\geq 3$

Ý tưởng đặt ẩn phụ cũng đã khá rõ ràng.

Đặt $\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}=a\geq 0, \sqrt{x+y-3}=b\geq 0$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1, b=2 \\ a=2, b=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=1 \\ x+y-3=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=4 \\ x+y-3=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4-\sqrt{10}, y=3+\sqrt{10} \\ x=4+\sqrt{10}, y=3-\sqrt{10} \\ x=3, y=1 \\ x=5, y=-1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(3;1),(5;-1)(4\pm\sqrt{10};3\mp\sqrt{10})\square$

Câu 105 $\begin{cases} x^3(2+3y)=8 \\ x(y^3-2)=6 \end{cases}$

Giải

Đây là một câu khá giống câu số 37
Nghiệm : $(x;y)=(-2;-1),(1;2)$ $\square$

Câu 106 $\begin{cases} 2x^2y+3xy=4x^2+9y \\ 7y+6=2x^2+9x \end{cases}$

Giải

Bài này nếu lười nghĩ có thể dùng môn võ thế thần chưởng y vào PT(1). Nhưng hãy dùng UCT ở đây sẽ tốt hơn.
Nhận thấy $y=3$ là nghiệm (cái này giở lại nhé, tôi không giải thích nữa), thay $y=3$ vào hệ ta có

$$\begin{cases} 2x^2+9x-27=0 \\ 27-2x^2+9x=0 \end{cases}$$

Như vậy hướng của ta sẽ cộng hai phương trình ban đầu lại và nhân tử $y-3$ sẽ xuất hiện. Vậy

$$PT(1)+PT(2) \Leftrightarrow (3-y)\left(2x^2+3x-2\right)=0$$

Đến đây dễ dàng giải ra $(x;y)=\left(-2;-\dfrac{16}{7}\right),\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{7}\right),\left(-\dfrac{3(3\pm\sqrt{33})}{4};3\right)$ $\square$

Câu 107 $\begin{cases} x^2+3y=9 \\ y^4+4(2x-3)y^2-48y-48x+155=0 \end{cases}$

Giải

Đây là một câu khá hóc, không phải ai cũng có thể dễ dàng giải nó được.
Thế $3y=9-x^2$ từ (1) xuống (2) ta được

$$y^4+8xy^2-12y^2-16(9-x^2)-48x+155=0$$

$$\Leftrightarrow y^4+8xy^2+16y^2-12(y^2+4x)+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2+4x=1 \\ y^2+4x=11 \end{array}\right.$$

TH1 :

$$y^2+4x=11 \Leftrightarrow \left(\frac{9-x^2}{3}\right)^2+4x=11 \Leftrightarrow x^4-18x^2+36x-18=0$$

$$\Leftrightarrow x^4=18(x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3\sqrt{2}x+3\sqrt{2}=0 \\ x^2+3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 - 12\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{12\sqrt{2} \mp 6\sqrt{36 - 24\sqrt{2}}}{12} \\ x = \dfrac{-3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 - 12\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{-12\sqrt{2} \mp 6\sqrt{36 - 24\sqrt{2}}}{12} \end{array}\right.$$

TH2 :

$$y^2 + 4x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{9 - x^2}{3}\right)^2 + 4x = 1 \Leftrightarrow x^4 - 18x^2 + 36x + 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 6x + 12\right)\left(x^2 + 6x + 6\right) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{3} \Rightarrow y = -1 \pm 2\sqrt{3}$$

Vậy hệ có cả thảy 6 nghiệm như trên □

Một thắc mắc nhỏ là ở TH2 vì sao $x^4 - 18x^2 + 36x + 72 = (x^2 - 6x + 12)(x^2 + 6x + 6)$. Tách nhân tử kiểu gì hay vậy ? Casio truy nhân tử chăng ? Có thể lắm. Nhưng thực ra phương trình bậc 4 đã có cách giải tổng quát bằng công thức Ferrari. Đối với ví dụ trên ta làm như sau

$$x^4 - 18x^2 + 36x + 72 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2ax^2 + a^2 = (18 - 2a)\, x^2 - 36x + a^2 - 72$$

Ta phải tìm a sao cho vế phải phân tích được thành bình phương. Như thế nghĩa là

$$18^2 = (18 - 2a)\left(a^2 - 72\right) \Leftrightarrow a = -9$$

Như vậy

$$x^4 - 18x^2 + 36x + 72 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 9)^2 = 9(2x - 1)^2 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 12)(x^2 + 6x + 6) = 0$$

Chi tiết về giải phương trình bậc 4 các bạn có thể tìm dễ dàng trên google. Giờ ta tiếp tục các bài hệ. Tiếp theo là một chùm hệ sử dụng tính đơn điệu của hàm số khá dễ nhìn.

Câu 108 $\begin{cases} \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = 1 \\ y + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{35}{12} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x^2 > 1$
Không thể làm ăn được gì từ (2). Từ (1) ta nhận xét thấy hai hàm giống nhau nhưng chúng lại dính chặt với nhau, không chịu tách rời. Vậy ta dứt chúng ra. Phép liên hợp sẽ giúp ta
Phương trình (1) tương đương

$$\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)\left(\sqrt{y^2 + 1} - y\right) = \sqrt{y^2 + 1} - y \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = -y + \sqrt{y^2 + 1}$$

Tách được rồi nhưng có vẻ hai bên không còn giống nhau nữa. Khoan !! Nếu thay $y^2 = (-y)^2$ thì sao nhỉ. Quá tốt. Như vậy cả hai vế đều có dạng $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ và hàm này đơn điệu tăng. Từ đó ta rút ra $x = -y$
Thay lại vào (2) ta được

$$y + \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{35}{12}$$

Đây thực ra là một phương trình khá khó chịu. Thoạt tiên khi thấy loại này ta sẽ bình phương 2 vế lên. Điều kiện bình phương là $y > 0$ khi đó ta có

$$y^2 + \frac{2y^2}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{y^2}{y^2-1} = \left(\frac{35}{12}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{y^4 - y^2 + y^2}{y^2-1} + \frac{2y^2}{\sqrt{y^2-1}} = \left(\frac{35}{12}\right)^2$$

Đến đây đã khá rõ ràng . Đặt $\dfrac{y^2}{\sqrt{y^2-1}} = t > 0$ và phương trình tương đương

$$t^2 + 2t - \left(\frac{35}{12}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{49}{12}(L) \\ t = \dfrac{25}{12} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{y^2}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{25}{12} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \pm\dfrac{5}{4} \\ y = \pm\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện bình phương chỉ lấy 2 giá trị dương.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right), \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$ □

Câu 109 $\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \le \dfrac{5}{2}, x \le \dfrac{3}{4}$ Viết lại phương trình (1) như sau

$$(4x^2+1)x = (3-y)\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow (4x^2+1)2x = (6-2y)\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow f(2x) = f\left(\sqrt{5-2y}\right)$$

Với $f(t) = t^3 + t$ là hàm đơn điệu tăng. Từ đó ta có $2x = \sqrt{5-2y} \Rightarrow x \ge 0$ thay vào (2) ta có

$$4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7$$

Giờ công việc của ta là khảo sát hàm số vế trái trên $\left(0; \dfrac{3}{4}\right)$ và chứng minh nó đơn điệu giảm.
Xin nhường lại bạn đọc
Với hàm số vế trái đơn điệu giảm ta có $x = \dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất $\Rightarrow y = 2$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ □

Hãy để ý kĩ mối tương quan giữa các biểu thức trong một phương trình va ta sẽ đạt mục đích

Câu 110 $\begin{cases} y^3 + y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \\ \sqrt{1-x^2} - \sqrt{y} = \sqrt{2-y} - 1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $0 \le y \le 2, -1 \le x \le 1$
Phương trình (1) tương đương

$$y^3 + y = (x+1)^3 + (x+1) \Leftrightarrow y = x + 1$$

Thay vào (2) ta có

$$\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} - 1$$

Phương trình này không quá khó. Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \dfrac{t^2-2}{2}$. Thay vào phương trình ta được

$$\frac{t^2-2}{2} = t - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 0 \\ \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0, y = 1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm :$(x; y) = (0; 1)$□

Những bài này thường sẽ nặng về giải phương trình vô tỉ hơn.

Câu 111 $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5} \\ x + y + x^2 + y^2 = 80 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \ge -1, y \ge 5$
Phương trình đầu có dạng

$$f(x+1) = f(y-5)$$

Với $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt{t+2} + \sqrt{t+4}$ là hàm đơn điệu tăng. Từ đó ta có $y = x + 6$ thay vào (2) ta có

$$x + x + 6 + x^2 + (x+6)^2 = 80 \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{5}-7}{2} \Rightarrow y = \frac{5\sqrt{5}+5}{2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{5\sqrt{5}-7}{2}; \dfrac{5\sqrt{5}+5}{2}\right)$ □

Ở đây tôi đã đưa ra một số câu hệ sử dụng tính đơn điệu của hàm số khá đơn giản. Nói là đơn giản vì từ một phương trình ta nhìn thấy ngay hoặc một chút biến đổi để nhìn ra dạng của hàm cần xét. Tôi sẽ còn giới thiệu khá nhiều những bài cần biến đổi tinh tế để nhìn ra dạng hàm, ở những câu sau của cuốn sách.

Câu 112 $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 = -3 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} + 6y = 24 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $0 \leq x \leq 32$
Có vẻ đây là một hệ khác rắc rối khi xuất hiện căn bậc 4. Ta sẽ dùng các đánh giá để giải quyết cái hệ này
Cộng 2 phương trình cho nhau ta được

$$\sqrt{x} + \sqrt{32-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} = y^2 - 6y + 21$$

Hiển nhiên ta có : $VP \geq 12$
Giờ ta tiến hành đánh giá vế trái. Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ cho vế trái ta có

$$\sqrt{x} + \sqrt{32-x} \leq \sqrt{(1+1)(x+32-x)} = 8$$

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} \leq \sqrt{(1+1)(\sqrt{x}+\sqrt{32-x})} \leq 4$$

Vậy $VT \leq VP$
Dấu bằng xảy ra khi $(x; y) = (16; 3)\square$

Tôi còn một câu ý tưởng giống bài này nhưng hơi khó hơn một chút. Bạn đọc có thể giải nó

Câu 113 $\begin{cases} \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} - y^2 = 2\sqrt{2} \\ \sqrt[4]{2x} + 2\sqrt{6-x} + 2\sqrt{2}y = 8 + \sqrt{2} \end{cases}$

Nghiệm : $(x; y) = (2; \sqrt{2})\square$

Câu 114 $\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 \\ xy + x + 1 = x^2 \end{cases}$

Giải

Bài này có lẽ không cần suy nghĩ nhiều. Cứ thế $y+1$ lên (1) coi sao
Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm. Phương trình (2) tương đương

$$x(y+1) = x^2 - 1 \Leftrightarrow y + 1 = \frac{x^2-1}{x}$$

Thay lên (2) ta sẽ được

$$x(x^2-1)\left(x + \frac{x^2-1}{x}\right) = 3x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = -\dfrac{5}{2} \\ x = 1 \Rightarrow y = -1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; -1), \left(-2; -\dfrac{5}{2}\right)\square$

Câu 115 $\begin{cases} 4xy + 4(x^2+y^2) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x + y \neq 0$
Đây là một bài hệ không đơn giản chút nào. Tuy nhiên ta có một nhận xét khá tốt sau đây :

$$a(x^2+y^2) + bxy = k(x+y)^2 + l(x-y)^2$$

Giờ hãy phân tích $4x^2 + 4y^2 + 4xy = k(x+y)^2 + l(x-y)^2$
Cân bằng hệ số ta thu được : $4x^2 + 4y^2 + 4xy = 3(x+y)^2 + (x-y)^2$
Như vậy ý tưởng sẽ là đặt ẩn phụ tổng-hiệu chăng ? Càng có cơ sở khi $2x = x+y+x-y$. Như vậy ý tưởng sơ bộ là thế. Biến đổi hệ thành

$$\begin{cases} 3(x+y)^2 + (x-y)^2 + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ x+y+\dfrac{1}{x+y} + x - y = 3 \end{cases}$$

Đừng vội đặt ngay. Để ý một chút $3(x+y)^2 + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 3\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)^2 - 6$. Như vậy cách đặt ẩn của ta sẽ triệt để hơn.
Đặt $x+y+\dfrac{1}{x+y} = a, x-y = b$ ta thu được hệ mới

$$\begin{cases} b^2 + 3a^2 = 13 \\ a + b = 3 \\ |a| \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, b = 1 \\ a = -\dfrac{1}{2}, b = \dfrac{7}{2} (L) \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x+y} = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = (1;0)$ □

OK chưa ? Tiếp tục thêm một câu tương tự nhé

Câu 116 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6xy - \dfrac{1}{(x-y)^2} + \dfrac{9}{8} = 0 \\ 2y - \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{5}{4} = 0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \neq y$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2(x+y)^2 - (y-x)^2 - \dfrac{1}{(y-x)^2} + \dfrac{9}{8} = 0 \\ \left(y - x + \dfrac{1}{y-x}\right) + (x+y) + \dfrac{5}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)^2 - \left(y - x + \dfrac{1}{y-x}\right)^2 + \dfrac{25}{8} = 0 \\ \left(y - x + \dfrac{1}{y-x}\right) + (x+y) + \dfrac{5}{4} = 0 \end{cases}$$

Đặt $x+y=a, y-x+\dfrac{1}{y-x}=b, |b|\geq 2$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} a+b=-\dfrac{5}{4} \\ 2a^2-b^2=-\dfrac{25}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{4} \\ b=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+x=\dfrac{5}{4} \\ y-x=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} y+x=\dfrac{5}{4} \\ y-x=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{13}{8}, y=-\dfrac{3}{8} \\ x=\dfrac{7}{8}, y=\dfrac{3}{8} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{7}{8};\dfrac{3}{8}\right), \left(\dfrac{13}{8};-\dfrac{3}{8}\right)$ □

Tôi sẽ đưa thêm 2 câu nữa cho bạn đọc luyện tập

Câu 117 $\begin{cases} 3(x^2+y^2)+2xy+\dfrac{1}{(x-y)^2}=20 \\ 2x+\dfrac{1}{x-y}=5 \end{cases}$

Nghiệm : $(x;y)=(2;1), \left(\dfrac{4-\sqrt{10}}{3};\dfrac{\sqrt{10}-3}{3}\right), \left(\dfrac{4+\sqrt{10}}{3};\dfrac{-3-\sqrt{10}}{3}\right)$ □

Câu 118 $\begin{cases} (4x^2-4xy+4y^2-51)(x-y)^2+3=0 \\ (2x-7)(x-y)+1=0 \end{cases}$

Thử động não một chút xem vì sao lại đưa được về giống 3 câu trên ?

Nghiệm :$(x;y)=\left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right), \left(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2};\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ □

Câu 119 $\begin{cases} 2x^2+x-\dfrac{1}{y}=2 \\ y-y^2x-2y^2=-2 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y\neq 0$

Phương trình (2) tương đương với

$$\frac{1}{y}-x-2=-\frac{2}{y^2}$$

Đặt $a = \dfrac{1}{y}$ ta chuyển hệ về

$$\begin{cases} 2x^2 + x - a = 2 \\ 2a^2 + a - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, a = -1 \\ x = 1, a = 1 \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, a = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, a = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (\pm 1; \pm 1), \left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}; 1 \mp \sqrt{3}\right)$ $\square$

Câu 120 $\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \\ 4x^2 + 2y^2 - 4xy = 2 \end{cases}$

Giải

Hình thức khá gọn nhẹ nhưng cũng rất khó chơi. Một chút tinh ý ta nhận thấy $y^2 = 1$ là nghiệm của hệ. Thay vào và ta rút ra

$$PT(1) - PT(2) \Leftrightarrow y^4 - 4xy^3 - 2y^2 + 4xy + 1 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)(y^2 - 4xy - 1) = 0$$

Với $y = 1$ thay vào (2) ta tìm được $x = 0$ hoặc $x = 1$
Với $y = -1$ thay vào (2) ta tìm được $x = 0$ hoặc $x = -1$
Với $y^2 = 4xy + 1$. Không cần nghĩ nhiều, thế trâu bò vào cho nhanh !!!
Ta rút ra $x = \dfrac{y^2 - 1}{4y}$ thay vào (2) ta có

$$4\left(\frac{y^2-1}{4y}\right)^2 + 2y^2 + 1 - y^2 = 2 \Leftrightarrow 5y^4 - 6y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \Rightarrow x = 0 \\ y = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1), (-1; -1), (0; 1), (0; -1), \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}; -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}; \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ $\square$

2.5 Câu 121 đến câu 150

Câu 121 $\begin{cases} x^4 + x^3y + 9y = y^3x + x^2y^2 + 9x \\ x(y^3 - x^3) = 7 \end{cases}$

Giải

Không cần biết Tổ quốc nơi đâu, chiến phương trình đầu đã

$$PT(1) \Leftrightarrow (x - y)(x(x + y)^2 - 9) = 0$$

Với $x = y$ kết hợp với (2) rõ ràng không thỏa
Còn lại ta kết hợp thành một hệ mới

$$\begin{cases} x\left(y^3 - x^3\right) = 7 \\ x(x + y)^2 = 9 \end{cases}$$

Đây là một bài toán khá quen thuộc và hấp dẫn đã từng xuất hiện trên báo THTT, cách làm phổ biến nhất vẫn là "trâu bò"

Trước hết có đánh giá $x > 0$ và rút ra $y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}}$. Thay xuống ta có

$$x\left(x + \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow x^3 + 2x\sqrt[3]{x^6 + 7x^2} + \sqrt[3]{x(x^4 + 7)^2} = 9$$

Đặt vế trái là $f(x)$. Ta có

$$f'(x) = 3x^2 + 2\left(\sqrt[3]{x^6 + 7x^2} + \frac{6x^6 + 14x^2}{3\sqrt[3]{(x^6 + 7x^2)^2}}\right) + \frac{1}{3}.\frac{9x^8 + 70x^4 + 49}{\sqrt[3]{x^2(x^4 + 7)^4}} > 0$$

Vậy $f(x) = 9$ có nghiệm duy nhất $x = 1 \Rightarrow y = 2$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 2)\square$

Tiếp theo tôi xin giới thiệu cho các bạn một số câu hệ sử dụng Bất đẳng thức *Minkowski* để giải. Bất đẳng thức Minkowski là một bất đẳng thức không khó và cũng thường được dùng, bất đẳng thức đề cập đến vấn đề độ dài của vectơ trong không gian mà sau này học sinh quen gọi nó là bất đẳng thức *Vector*
Với hai vectơ $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ bất kì ta luôn có

$$|\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| \geq |\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|$$

Nếu tọa độ hóa 2 vecto này ta sẽ thu được

$$\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2} + \sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi (a_1, a_2) và (b_1, b_2) là 2 bộ tỉ lệ
Đây là một hệ quả hay dùng trong giải hệ
Thì khi nào nhìn vào một bài hệ ta có thể nghĩ đến sử dụng Bất đẳng thức *Minkowski*. Thường khi nhìn thấy tổng hai căn thức mà bậc của biểu thức trong căn không vượt quá 2 thì ta có thể chọn hướng này. Tôi sẽ nêu 3 ví dụ để bạn đọc hiểu rõ hơn

Câu 122 $\begin{cases} 3x+4y=26 \\ \sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}+\sqrt{x^2+y^2-20x-10y+125}=10 \end{cases}$

Giải

Ý tưởng sử dụng đã hiện rõ rồi. Bước đầu tiên ta làm đó là phân tích biểu thức trong căn thành tổng các bình phương đã. Vế trái của (2) khi đó sẽ là

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}$$

Tuy nhiên nếu ta sử dụng Bất đẳng thức *Minkowski* ngay bây giờ thì nó sẽ là

$$VT \geq \sqrt{(x-2+x-10)^2+(y+1+y-5)^2}$$

Không phải 10 nữa mà là một biểu thức khá phức tạp. Khi đó ta phải xem lại cách viết các bình phương của mình
Để ý nếu là hằng số vế phải thì khi cộng vào ta phải làm triệt tiêu ẩn đi. Vậy cần phải viết như sau

$$VT=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(10-x)^2+(5-y)^2} \geq \sqrt{(x+2+10-x)^2+(y+1+5-y)^2}=10$$

Ok rồi. Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{10-x}{x-2}=\dfrac{5-y}{y+1} \Leftrightarrow 3x-4y=10$
Kết hợp (1) dễ dàng giải ra $(x;y)=(6;2)\square$

Như ta đã thấy, sử dụng không khó. Tuy nhiên cái khó ở đây chính là nghệ thuật đổi dấu và sắp xếp các hạng tử của bình phương để ta đạt được mục đích

Câu 123 $\begin{cases} x^2-2y^2-7xy=6 \\ \sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{y^2-2y+2}=\sqrt{x^2+y^2+2xy+9} \end{cases}$

Giải

Xét phương trình (2) ta có

$$VT=\sqrt{(x+1)^2+2^2}+\sqrt{(y-1)^2+1^2} \geq \sqrt{(x+y)^2+3^2}=VP$$

Đẳng thức xảy ra khi $x+1=2(y-1) \Leftrightarrow x=2y-3$
Thay vào (1) và ta dễ dàng giải ra $(x;y)=\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{4}\right),(-1;1)\square$

Câu 124 $\begin{cases} \sqrt{2x^2+6xy+5y^2}+5=\sqrt{2x^2+6xy+5y^2+14x+20y+25} \\ x^4+25y^2-2=0 \end{cases}$

Giải

Bây giờ nếu chuyển căn sang vế trái, hằng số sang vế phải là chết dở. Mấu chốt ở đây là gì ? Số 5 chăng ? Đúng vậy, ta phân tích $5=\sqrt{3^2+4^2}$ để sử dụng bất đẳng thức Minkowski. Tuy nhiên các đổi dấu và sắp xếp số hạng như thế nào. Cái đó ta phải quan tâm đến vế phải để chọn lựa cho phù hợp. Ở đây sẽ là

$$VT=\sqrt{(x+y)^2+(x+2y)^2}+\sqrt{4^2+3^2}\geq\sqrt{(x+y+4)^2+(x+2y+3)^2}=VP$$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{x+2y}{3}\Leftrightarrow x=-5y$

Thay vào (2) và ta dễ dàng giải ra $(x;y)=\left(1;-\dfrac{1}{5}\right),\left(-1;\dfrac{1}{5}\right)$ $\square$

Câu 125 $\begin{cases} 2y(x^2-y^2)=3x \\ x(x^2+y^2)=10y \end{cases}$

Giải

Một hệ đưa về dạng đẳng cấp rõ ràng. Tuy nhiên, ta hãy xử lí sơ bộ hệ này để loại một số trường hợp

Từ (2) dễ thấy $x.y$ phải cùng dấu, mà nếu thế ở (1) $x^2\geq y^2$

Trước hết $x=y=0$ là một nghiệm của hệ

Nhân chéo 2 phương trình cho nhau ta được

$$20y^2(x^2-y^2)=3x^2(x^2+y^2)\Leftrightarrow(x-2y)(2y+x)(5y^2-3x^2)=0$$

Vì x và y cùng dấu nên nên từ đây ta suy ra $x=2y$ hoặc $x=\sqrt{\dfrac{5}{3}}y$

Đến đây chỉ việc thay vào (1). Xin nhường lại cho bạn đọc

Vậy hệ đã cho có nghiệm :

$(x;y)=(0;0),(2;1),(-2,-1),\left(\dfrac{\sqrt[4]{30375}}{6};\dfrac{\sqrt[4]{135}}{2}\right),\left(-\dfrac{\sqrt[4]{30375}}{6};-\dfrac{\sqrt[4]{135}}{2}\right)$ $\square$

Câu 126 $\begin{cases} \sqrt{7+x}+\sqrt{11-y}=6 \\ \sqrt{7+y}+\sqrt{11-x}=6 \end{cases}$

Giải

Cộng 2 phương trình cho nhau ta có

$$\sqrt{7+x}+\sqrt{11-x}+\sqrt{7+y}+\sqrt{11-y}=12$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ cho vế trái ta có

$$VT \leq \sqrt{(1+1)(7+x+11-x)}+\sqrt{(1+1)(7+y+11-y)}=12$$

Dấu bằng xảy ra khi $(x;y)=(2;2)$ $\square$

Câu 127 $\begin{cases} 2x^2y^2+x^2+2x=2 \\ 2x^2y-x^2y^2+2xy=1 \end{cases}$

Giải

Biến đổi 1 tí, hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2x^2y^2+(x+1)^2=3 \\ 2xy(x+1)-x^2y^2=1 \end{cases} \Rightarrow (xy+x+1)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=1-x \\ xy=-3-x \end{array}\right.$$

Với $xy=1-x$ thay vào (1) ta có

$$2(1-x)^2+x^2+2x=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(L) \\ x=\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Với $xy=-3-x$ thay vào (2) ta có

$$2(x+3)^2+x^2+2x=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{8}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{8} \\ x=-2 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{8}{3};\frac{1}{8}\right),\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ $\square$

Câu 128 $\begin{cases} (x-1)(y-1)(x+y-2)=6 \\ x^2+y^2-2x-2y-3=0 \end{cases}$

Giải

Bài này ý tưởng đặt ẩn phụ đã rõ ràng
Đặt $x-1=a, y-1=b$ ta đưa về hệ sau

$$\begin{cases} ab(a+b)=6 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1, b=2 \\ a=2, b=1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=3 \\ x=3, y=2 \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(2;3),(3;2)\square$

Câu 129 $\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2 \\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=x^2+8 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq -2, y \leq \dfrac{16}{3}$
Phương trình đầu tương đương

$$x^3-y^3+3(x-y)=3(x^2+y^2)+2 \Leftrightarrow (x-1)^3=(y+1)^3 \Leftrightarrow y=x-2$$

Thay vào (2) ta được

$$4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$$

Đây là một phương trình vô tỉ không hẳn là dễ xơi. Cái hay của bài này ở đây
Phương trình đã cho tương đương

$$4\left(\sqrt{x+2}-\frac{x+4}{3}\right)+\left(\sqrt{22-3x}-\frac{14-x}{3}\right)=x^2-x-2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{9(x+2)-x^2-8x-16}{9\left(\sqrt{x+2}+\dfrac{x+4}{2}\right)}\right)+\left(\frac{9(22-3x)-x^2+28x-196}{9\left(\sqrt{22-3x}+\dfrac{14-x}{3}\right)}\right)=x^2-x-2$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-2)\left(1+\frac{4}{9\left(\sqrt{x+2}+\dfrac{x+4}{3}\right)}+\frac{1}{9\left(\sqrt{22-3x}+\dfrac{14-x}{3}\right)}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(2;0),(-1;-3)\square$

Câu hỏi đặt ra là vì sao lại chọn được những biểu thức kia để liên hợp. Một sự tình cờ chăng? Không ! Là cả một phương pháp đó ! Tôi xin viết 1 bài nhỏ ở đây tiếp

Đối một phương trình vô tỉ, phương pháp hay dùng nhất đó là nhân lượng liên hợp. Tuy nhiên, nhân liên hợp cũng cần một chút kĩ thuật. Đối với bài này ta tiến hành như sau
Nhẩm hoặc Casio ta thấy phương trình có nghiệm $x=-1; x=2$
Đối với phương trình có 2 nghiệm trở nên thì cách thêm bớt hằng số vào mỗi căn rồi liên hợp là không phù hợp, ở đây ta không thêm bớt hằng số mà thêm hẳn một biểu thức $ax+b$ nào đó
Trước hết với $\sqrt{x+2}$ nhé
Với $x=-1$ thay vào căn có giá trị bằng 1, thay vào biểu thức thêm ta có $-a+b=1$
Với $x=2$ thay vào căn có giá trị bằng 2, thay vào biểu thức thêm ta có $2a+b=2$
Giải hệ này ra ta có $a=\frac{1}{3}, b=\frac{4}{3}$
Vậy biểu thức cần chèn vào đó là $\frac{x+4}{3}$
Tương tự với $\sqrt{22-3x}$. OK ???

Câu 130 $\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1}+x+\sqrt{y^2+x+y+1}+y=18 \\ \sqrt{x^2+x+y+1}-x+\sqrt{y^2+x+y+1}-y=2 \end{cases}$

Giải

Ý tưởng đặt ẩn cũng đã lộ rồi
Đặt $\sqrt{x^2+x+y+1}+\sqrt{y^2+x+y+1}=a\geq 0, x+y=b$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} a+b=18 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ \sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10 \end{cases}$$

Đây là một hệ khá đơn giản và có nhiều cách. Tối ưu nhất đó là

$$\sqrt{x^2+3^2}+\sqrt{y^2+3^2}\geq\sqrt{(x+y)^2+(3+3)^2}=10$$

Đẳng thức xảy ra khi $(x;y)=(4;4)\square$

Câu 131 $\begin{cases} 12x+3y-4\sqrt{xy}=16 \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y+5}=6 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x\geq -\frac{5}{4}, y\geq -5, xy\geq 0$
Từ phương trình đầu ta thấy ngay $x,y>0$
Phương trình đầu tương đương

$$12x+3y=16+2\sqrt{4xy}\leq 16+(4x+y)\Leftrightarrow 4x+y\leq 8$$

Từ phương trình (2) ta lại có

$$\sqrt{4x+5}+\sqrt{y+5}\leq\sqrt{(1+1)(4x+y+10)}\leq 6$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} 4x=y \\ 4x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;4)\square$

Câu 132 $\begin{cases} 2x + (3 - 2xy)y^2 = 3 \\ 2x^2 - x^3y = 2x^2y^2 - 7xy + 6 \end{cases}$

Giải

Đây là một hệ cần khả năng biến đổi tương đối tốt.
Từ phương trình đầu ta thấy ngay

$$2x(1 - y^3) = 3(1 - y^2)$$

TH1 : $y = 1$ thay vào (2) ta có

$$x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3, x = -2$$

TH2 : Kết hợp với phương trình (2) ta gây dựng một hệ mới

$$\begin{cases} 2x + 2xy + 2xy^2 = 3 + 3y(*) \\ 2x^2 - x^3y = 2x^2y^2 - 7xy + 6 \end{cases}$$

Nhưng mà phương trình (2) lại tương đương : $(xy - 2)(2xy + x^2 - 3) = 0$
Sao mà phân tích hay thế ? Casio thần chưởng chăng. Có thể, nhưng ta hãy viết lại phương trình (2) một chút

$$(2) \Leftrightarrow 2x^2y^2 + xy(x^2 - 7) - 2x^2 + 6 = 0$$

$$\Delta_{xy} = \left(x^2 - 7\right)^2 - 8\left(-2x^2 + 6\right) = \left(x^2 + 1\right)^2$$

Thấy rồi chứ ? Coi xy là ẩn chính, tính Δ ra được kết quả mỹ mãn và từ đó có hướng phân tích nhân tử như trên
TH1 : $xy = 2$ thay lại (*) ta có

$$2x + 4 + 4y = 3 + 3y \Rightarrow x = \frac{-1 - y}{2}$$

$$\Rightarrow y(1 + y) = -4$$

Phương trình này vô nghiệm nên trường hợp 1 vô nghiệm
TH2 : $2xy = 3 - x^2$ thay lại (*) ta có

$$2x + 3 - x^2 + y(3 - x^2) = 3 + 3y \Rightarrow y = \frac{2}{x} - 1$$

$$\Rightarrow 2x\left(\frac{2}{x} - 1\right) = 3 - x^2 \Leftrightarrow x = 1, y = 1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1), (3; 1), (-2; 1)$ □

Câu 133 $\begin{cases} x(x+y)+\sqrt{x+y}=\sqrt{2y}\left(\sqrt{2y^3}+1\right) \\ x^2y-5x^2+7(x+y)-4=6\sqrt[3]{xy-x+1} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \geq 0, x+y \geq 0$
Xuất phát từ phương trình đầu, sử dụng phương pháp liên hợp

$$PT(1) \Leftrightarrow x^2+xy-2y^2=\sqrt{2y}-\sqrt{x+y}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+2y)=\frac{-(x-y)}{\sqrt{2y}+\sqrt{x+y}}$$

Rõ ràng $x+2y=x+y+y>0, \dfrac{-1}{\sqrt{2y}+\sqrt{x+y}}<0$ nên từ đó ta suy ra $x=y$
Thay vào phương trình (2) ta được

$$x^3-5x^2+14x-4=6\sqrt[3]{x^2-x+1}$$

Đây là một loại phương trình vô tỉ khá quen thuộc. Cách giải tốt nhất vẫn là thêm bớt và xét hàm. Tuy nhiên nếu ý đồ của ta là thêm bớt x^2-x+1 vào 2 vế để xét hàm t^3+6t có vẻ không thành công vì vế trái không phân tích được về dạng đó. Ta hãy khéo léo biến đổi một chút như sau
Phương trình đã cho tương đương

$$x^3+3x^2+6x+4=8x^2-8x+8+3\sqrt[3]{8x^2-8x+8}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3+3(x+1)=8x^2-8x+8+3\sqrt[3]{8x^2-8x+8}$$

Nhìn thấy hàm cần xét rồi chứ ? $f(t)=t^3+3t$ và hàm đơn điệu tăng. Từ đó ta có

$$\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{8x^2-8x+8} \Leftrightarrow x=1, y=1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1)\square$

Sử dụng liên hợp cũng là phương pháp khá thú vị. Nếu ta đã sử dụng nó tốt trong giải phương trình vô tỉ rồi thì khi đối mặt với hệ phương trình, chỉ cần một chút nhận xét hình thức của hệ và các kĩ năng tung ra, có thể ta sẽ thành công. Hãy cảnh giác với những bài hệ mà một phương trình chứa nhiều căn thức, có thể liên hợp sẽ là đòn đánh tốt nhất để chém đẹp nó

Tiếp theo ta đến với một câu hệ sử dụng liên hợp khá khó. Mong bạn đọc thứ lỗi vì tôi không thể diễn đạt nổi vì sao tôi lại làm vậy. Một kinh nghiệm khi tính giới hạn của hàm số đã giúp tôi giải quyết được nó.

Câu 134 $\begin{cases} \sqrt{x^2-x-y} = \dfrac{y}{\sqrt[3]{x-y}} \\ 2\left(x^2+y^2\right) - 3\sqrt{2x-1} = 11 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \neq y, x \geq \dfrac{1}{2}, x^2-x-y \geq 0$
Phương trình đầu tương đương

$$\sqrt{x^2-x-y}.\sqrt[3]{x-y} = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-y}\left(\sqrt[3]{x-y}-1\right) + \sqrt{x^2-x-y} - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-x-y}\,(x-y-1)}{\sqrt[3]{(x-y)^2}+\sqrt[3]{x-y}+1} + \frac{x^2-x-y-y^2}{\sqrt{x^2-x-y}+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left[\frac{\sqrt{x^2-x-y}}{\sqrt[3]{(x-y)^2}+\sqrt[3]{x-y}+1} + \frac{x+y}{\sqrt{x^2-x-y}+y}\right] = 0$$

Thành quả cũng có chút ít rồi. Giờ đây ta chỉ mong em trong ngoặc luôn dương hoặc âm
Từ phương trình (1) ta thấy ngay y và $\sqrt[3]{x-y}$ phải cùng dấu.
Giả sử $y<0$ thì suy ra $x-y<0 \Rightarrow x<y<0$. Rõ ràng vô lí vì điều kiện là $x \geq \dfrac{1}{2}$.
Như vậy suy ra $y>0 \Rightarrow x>y>0$ và hiển nhiên người đẹp trong ngoặc sẽ luôn dương
Thở phào nhẹ nhõm được rồi. Giờ hưởng thụ thành quả ! Với $y=x-1$ thay vào (2) ta có

$$2\left(x^2+(x-1)^2\right) - 3\sqrt{2x-1} = 11 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}(TM)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ $\square$

Câu 135 $\begin{cases} x^4+2xy+6y-(7+2y)x^2 = -9 \\ 2yx^2-x^3 = 10 \end{cases}$

Giải

Phương trình (1) tương đương

$$x^4-7x^2+9-2y(x^2-x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-3)(x^2+x-3) - 2y\left(x^2-x-3\right) = 0$$

TH1 : $x^2-x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{79+\sqrt{13}}{36} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{79-\sqrt{13}}{36} \end{array}\right.$

TH2 : $2y = x^2+x-3$ thay vào (2) ta có

$$\left(x^2+x-3\right)x^2 - x^3 = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{5} \Rightarrow y = 1-\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ x = -\sqrt{5} \Rightarrow y = 1+\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm

$$(x;y)=\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{79+\sqrt{13}}{36}\right),\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};\frac{79-\sqrt{13}}{36}\right),\left(\sqrt{5};1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right),\left(-\sqrt{5};1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\square$$

Câu 136 $\begin{cases} 1+xy+\sqrt{xy}=x \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x}}+y\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+3\sqrt{y} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x>0, y\geq 0$
Cứ quy đồng (2) lên đã. Phương trình (2) tương đương

$$1+xy\sqrt{xy}=x+3x\sqrt{xy}\Leftrightarrow 1+xy\sqrt{xy}=(1+3\sqrt{xy})x$$

$$\Leftrightarrow 1+xy\sqrt{xy}=(1+3\sqrt{xy})(1+xy+\sqrt{xy})$$

Đến đây là một phương trình ẩn $\sqrt{xy}$. Giải phương trình này ta tìm được

$$\sqrt{xy}=0\Rightarrow x=1, y=0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;0)\square$

Câu 137 $\begin{cases} x^2y+y=2 \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+x^2y^2=3 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x\neq 0$
Bài này nếu thế trâu bò y xuống dưới nó sẽ ra bậc 4 ẩn x^2. Hơi vất vả. Tuy nhiên, chỉ với một vài biến đổi đơn giản nhưng vô cùng tinh tế, ta sẽ đưa về một phương trình khá dễ giải
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} y(x^2+1)=2 \\ y^2(x^2+1)=3-\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

Lấy phương trình dưới chia cho trên ta sẽ thu được

$$y=\frac{3x^2-1}{2x^2}$$

Mà theo (1) ta lại có $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ như vậy ta có

$$\frac{3x^2-1}{2x^2}=\frac{2}{x^2+1}\Leftrightarrow x^2=1\Rightarrow y=1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (\pm 1;1)\square$

Câu 138 $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} = 2(x^2+y^2) \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y} = y^2 - x^2 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x, y \neq 0$
Đang thấy tổng và hiệu của 2 đối tượng. Theo bản năng ta sẽ lần lượt cộng trừ 2 phương trình để đưa về một đối tượng.
Vậy lấy $(1)+(2)$ và $(1)-(2)$ ta gây dựng một hệ mới

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} = 3y^2 + x^2 \\ \dfrac{1}{y} = 3x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3y^2x + x^3 \\ 1 = 3x^2y + y^3 \end{cases}$$

Lừng lững một hệ đẳng cấp trước mắt. Nhưng đời không như là mơ. Nếu đặt $x = ty$ sẽ ra nghiệm t xấu như một con gấu. Với loại này ta làm gỏi bằng cách cộng hoặc trừ các phương trình. Nếu lẻ thì hẳn phải có dạng nào đó đặc biệt.
Coi hai phương trình sau cùng là (3) và (4). Lấy $(3)+(4)$ và $(3)-(4)$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 3 \\ x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 = 3 \\ (x-y)^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2}; \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\right)\square$

Câu 139 $\begin{cases} \dfrac{1}{3x} + \dfrac{2x}{3y} = \dfrac{x+\sqrt{y}}{2x^2+y} \\ 2(2x+\sqrt{y}) = \sqrt{2x+6} - y \end{cases}$

Giải

Bài toán đã từng xuất hiện trong kì thi vòng 2 học sinh giỏi thành phố Hà Nội và nhanh chóng lan tỏa. Để ý một cách tinh tế ta sẽ nhận ra sự thuần nhất của phương trình đầu với 2 biến x và $\sqrt{y}$
Điều kiện : $y > 0, -3 \leq x \neq 0$
Đặt $\sqrt{y} = tx \Rightarrow y = t^2x^2$ thay tất cả vào (1) ta được

$$\frac{1}{3x} + \frac{2x}{3t^2x^2} = \frac{x+tx}{2x^2+t^2x^2}$$

Rút gọn biến x ta đưa về phương trình ẩn t. Cụ thể là

$$(t-2)^2(t^2+t+1)=0 \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \sqrt{y}=2x \geq 0$$

Thay vào (2) ta được

$$4x^2+8x=\sqrt{2x+6}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+10x+\frac{25}{4}=2x+6+\sqrt{2x+6}+\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \left(2x+\frac{5}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2x+6}+\frac{1}{2}\right)^2$$

Đến đây đơn giản rồi ! Chú ý điều kiện $x \geq 0$. Ta sẽ giải ra $x=\dfrac{\sqrt{17}-3}{4} \Rightarrow y=\dfrac{13-3\sqrt{17}}{2}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt{17}-3}{4};\dfrac{13-3\sqrt{17}}{2}\right)$ $\square$

Câu 140 $\begin{cases} 3-(y+1)^2=\sqrt{x-y} \\ x+8y=\sqrt{x-y-9} \end{cases}$

Giải

Một chút nhẩm nghiệm đưa ta đến ý tưởng đánh giá cho bài này
Điều kiện : $x-y \geq 9$
Từ phương trình (1) ta thấy ngay

$$\sqrt{x-y}=3-(y+1)^2 \leq 3 \Leftrightarrow x-y \leq 9$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=8$ và $y=-1$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(8;-1)$ $\square$

Đây là một ví dụ dùng phương pháp đánh giá nói chung là đơn giản. Tuy nhiên đối với nhiều người, đây vẫn là một câu khá hóc nếu không tinh ý nhận ra. Hiển nhiên rồi ! Đánh giá luôn là phương pháp thuộc loại khó nhất trong giải hệ phương trình. Việc sử dụng đánh giá hoàn toàn là kinh nghiệm và kĩ năng trong quá trình làm bài chứ nó không có một công thức hay phương pháp nào cả. Đánh giá thường hay sử dụng nhất thường là : đưa phương trình về tổng các đại lượng không âm, đánh giá sự ràng buộc trái ngược của các ẩn, biểu thức (ví dụ trên), hoặc sử dụng các Bất đẳng thức thông dụng. Đánh giá tốt trước hết phải nắm chắc các bất đẳng thức thông dụng, nhìn bao quát toàn bộ hệ để phác ra sự ràng buộc của các ẩn. Trong cuốn sách tôi sẽ còn giới thiệu khá nhiều những câu đánh giá rất khó.

Câu 141 $\begin{cases} x^2y^2 + y^4 + 1 = 3y^2 \\ xy^2 + x = 2y \end{cases}$

Giải

Thấy $y = 0$ không là nghiệm. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{1}{y^2} = 3 \\ xy + \dfrac{x}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(y + \dfrac{1}{y}\right)^2 = 5 \\ x\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = 2 \end{cases}$$

Đặt $a = y + \dfrac{1}{y}, |a| \geq 2$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^2 + a^2 = 5 \\ xa = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, a = -2 \\ x = -2, a = -1(L) \\ x = 1, a = 2 \\ x = 2, a = 1(L) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, y = -1 \\ x = 1, y = 1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1), (-1; -1)\square$

Câu 142 $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 3 - xy \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 7 - \dfrac{3x^2y^2 + 2}{xy} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x, y \neq 0$
Để ý nếu ta bình phương (1) rồi thế xuống (2) sẽ chỉ còn lại ẩn xy
Từ (1) ta suy ra

$$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} = (3 - xy)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = (3 - xy)^2 - \frac{2}{xy}$$

Thay xuống (2) và ta thu được

$$(3 - xy)^2 - \frac{2}{xy} = 7 - 3xy - \frac{2}{xy} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2 \\ xy = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1)\square$

Câu 143 $\begin{cases} (xy+3)^2+(x+y)^2=8 \\ \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Giải

Một bài toán tôi đánh giá là hay. Trước hết có lẽ cứ khai triển cái (1) ra đã

$$PT(1) \Leftrightarrow x^2y^2+6xy+9+x^2+2xy+y^2=8$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2+x^2+y^2+1=-8xy$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)(y^2+1)=-8xy$$

Đến đây chắc hẳn đã nhìn ra rồi nhỉ ? Nhận thấy $x=0$ hay $y=0$ đều không là nghiệm của hệ. Phương trình (1) khi đó sẽ là

$$\frac{x^2+1}{x}.\frac{y^2+1}{y}=-8$$

Đến đây đặt $\dfrac{x}{x^2+1}=a$, $\dfrac{y}{y^2+1}=b$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a+b=-\frac{1}{4} \\ \dfrac{1}{ab}=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y}{y^2+1}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=2\pm\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2\pm\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(-1;2-\sqrt{3}),(-1;2+\sqrt{3}),(2-\sqrt{3};-1),(2+\sqrt{3};-1)\square$

Câu 144 $\begin{cases} x^2(y+1)=6y-2 \\ x^4y^2+2x^2y^2+y(x^2+1)=12y^2-1 \end{cases}$

Giải

Rất khó để tìm được gì khi xét từng phương trình, hoặc cả hai, tốt nhất hãy dùng sự trâu bò để làm
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} (x^2+1)(y+1)=7y-1 \\ y^2(x^2+1)^2+y(x^2+1)=13y^2-1 \end{cases}$$

Thế $x^2+1=\dfrac{7y-1}{y+1}$ xuống (2) ta có

$$y^2\left(\frac{7y-1}{y+1}\right)^2+y.\frac{7y-1}{y+1}=13y^2-1$$

$$\Leftrightarrow 36y^4 - 33y^3 - 5y^2 + y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 1 = 3 \\ x^2 + 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (-\sqrt{2}; 1), (\sqrt{2}; 1), \left(0; \dfrac{1}{3}\right)$ □

Câu 145 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \sqrt{y-1}(x+y-1) = (y-2)\sqrt{x+y} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \geq 1, x + y \geq 0$
Không làm ăn gì được từ (1). Ta sẽ phân tích (2)
Đặt $\sqrt{x+y} = a \geq 0, \sqrt{y-1} = b \geq 0$. Phương trình (2) sẽ tương đương

$$b(a^2 - 1) = a(b^2 - 1) \Leftrightarrow (a - b)(ab + 1) = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (-1; 2)$□

Câu 146 $\begin{cases} 2x(x+1)(y+1) + xy = -6 \\ 2y(y+1)(x+1) + xy = 6 \end{cases}$

Giải

Hệ nhìn có vẻ khá đối xứng nhưng hệ số lại đối nhau. Thói quen khi thấy kiểu bài này là ta cộng 2 phương trình lại.

$$PT(1) + PT(2) \Leftrightarrow 2(x+y)(xy + x + y + 1) + 2xy = 0 \Leftrightarrow (x + y + 1)(x + y + xy) = 0$$

TH1 : $x = -(y+1)$ thay vào (2) ta có

$$-2y^2(y+1) - y(y+1) = 6 \Leftrightarrow y = -2 \Rightarrow x = 1$$

TH2 : $xy + x + y = 0$. Kết hợp thêm với phương trình (2) như sau

$$(2) \Leftrightarrow 2y(xy + x + y + 1) + xy = 6 \Leftrightarrow 2y + xy = 6 \Leftrightarrow 2y - (x + y) = 6 \Leftrightarrow y = 6 + x$$

Thay lại vào trường hợp 2 và ta tìm thêm $(x; y) = (\sqrt{10} - 4; \sqrt{10} + 2), (-4 - \sqrt{10}; 2 - \sqrt{10})$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; -2), (\sqrt{10} - 4; \sqrt{10} + 2), (-4 - \sqrt{10}; 2 - \sqrt{10})$□

Câu 147 $\begin{cases} 6x^4 - (x^3 - x)y^2 - (y+12)x^2 = -6 \\ 5x^4 - (x^2-1)^2.y^2 - 11x^2 = -5 \end{cases}$

Giải

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của hệ này
Chia cả hai phương trình cho x^2 ta có

$$\begin{cases} 6x^2 + \dfrac{6}{x^2} - \left(x - \dfrac{1}{x}\right)y^2 - y - 12 = 0 \\ 5x^2 + \dfrac{5}{x^2} - \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 y^2 - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \dfrac{1}{x}\right)y^2 - y = 0 \\ 5\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Đến đây đặt $x - \dfrac{1}{x} = a$. Hệ trở thành

$$\begin{cases} 6a^2 - ay^2 - y = 0 \\ 5a^2 - a^2y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2}, y = 1 \\ a = 1, y = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Nhiều bạn sẽ băn khoăn là hệ kia giải ra a và y thế nào. Thì tôi gợi ý là chia cả 2 phương trình cho a^2 rồi đặt $y + \dfrac{1}{a} = X, \dfrac{y}{a} = Y$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}; 1\right), \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; 2\right)$ □

Câu 148 $\begin{cases} x - 2\sqrt{y+1} = 3 \\ x^3 - 4x^2\sqrt{y+1} - 9x - 8y = -52 - 4xy \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \geq -1$
Nhìn thấy $\sqrt{y+1}$ ở phương trình (2) cho ta liên tưởng đến phép thế ở đây. Có lẽ sẽ phải chơi trâu bò với hệ này
Từ (1) ta suy ra $2\sqrt{y+1} = x - 3$ và $y = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{4}$. Thay tất cả xuống (2) ta được

$$x^3 - 2x^2(x-3) - 9x - 2(x^2 - 6x + 5) = -52 - x(x^2 - 6x + 5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3(L) \\ x = 7 \Rightarrow y = 3 \end{array}\right.$$

Tôi loại $x = -3$ vì từ phương trình đầu để có nghiệm thì $x \geq 3$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (7; 3)$□

Câu 149 $\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 3 \\ x^2 - 4y^2 + \dfrac{2xy}{x+y-1} = -1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x + y \neq 1$ Phương trình (2) tương đương

$$(x^2 - 4y^2)(x + y - 1) + 2xy = -(x + y - 1)$$

Phân tích nhân tử ta được

$$(x + 2y - 1)(x^2 - 2y^2 - xy + y + 1) = 0$$

TH1 : $x + 2y - 1 = 0$ thay vào (1) dễ dàng tìm được
$(x; y) = \left(\dfrac{-1-2\sqrt{14}}{5}; \dfrac{3+\sqrt{14}}{5}\right), \left(\dfrac{2\sqrt{14}-1}{5}; \dfrac{3-\sqrt{14}}{2}\right)$
TH2: Kết hợp với (1) ta thiết lập một hệ mới

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - xy + y + 1 \\ x^2 + y^2 + x = 3 \end{cases}$$

Hệ này đã có cách giải bằng phương pháp UCT tôi nêu ở khoảng câu 20. Ở đây sẽ là

$$PT(1) - PT(2) \Leftrightarrow 3y^2 + xy + x - y - 4 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(x + 3y - 4) = 0$$

Đến đây dễ dàng rồi
Hệ đã cho có nghiệm
$(x; y) = \left(\dfrac{-1-2\sqrt{14}}{5}; \dfrac{3+\sqrt{14}}{5}\right), \left(\dfrac{2\sqrt{14}-1}{5}; \dfrac{3-\sqrt{14}}{2}\right), \left(-\dfrac{11}{10}; \dfrac{17}{10}\right), (1; 1), (1; -1), (-2; -1)\square$

Câu 150 $\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 3x - 2y - 1 = 3\sqrt{(x^2-1)(x-y)} \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{x-y} = \sqrt{2x-y+2} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq 1, x \geq y$
Phương trình (1) cho khá rắc rối nên thử khai thác (2) xem sao. Với hình thức như trên có lẽ bình phương là giải pháp tốt nhất. PT(2) khi đó sẽ tương đương

$$2x - y + 1 + 2\sqrt{(x+1)(x-y)} = 2x - y + 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x-y)} = \frac{1}{2}(*)$$

Thật tinh ý thì vế phải của (1) sẽ là

$$3\sqrt{(x+1)(x-y)(x-1)} = \frac{3}{2}.\sqrt{x-1}$$

Khá gọn đẹp, nhưng ta muốn gọn hơn nữa cơ. Từ (*) ta lại có

$$x^2 - xy + x - y = \frac{1}{4}$$

Một chút biến đổi vế trái của (1) ta được

$$2(x^2 - xy + x - y) + x - 1 = \frac{1}{2} + x - 1 = x - \frac{1}{2}$$

Vậy phương trình (1) sau khi kết hợp được từ (2) sẽ là

$$2x - 1 = 3\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = \dfrac{23}{12} \\ x = \dfrac{5}{4} \Rightarrow y = \dfrac{41}{36} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm :$(x;y) = \left(2;\dfrac{23}{12}\right), \left(\dfrac{5}{4};\dfrac{41}{36}\right)$ □

2.6 Câu 151 đến câu 180

Câu 151 $\begin{cases} 8x^2 + 18y^2 + 36xy - 5(2x+3y)\sqrt{6xy} = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 = 30 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $xy \geq 0$
Nhận thấy ngay sự thuần nhất của phương trình đầu, đặt $y = tx$ hoặc chia cho x^2 luôn chăng ? Không nên. Hãy biến đổi để giảm sự cồng kềnh đã.
Phương trình đầu tương đương

$$2(2x+3y)^2 + 12xy - 5(2x+3y)\sqrt{6xy} \Leftrightarrow (2x + 3y - 2\sqrt{6xy})(4x + 6y - \sqrt{6xy}) = 0$$

TH1 :

$$2x + 3y = 2\sqrt{6xy} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \geq 0 \\ 4x^2 + 12xy + 9y^2 = 24xy \end{cases} \Leftrightarrow 2x = 3y$$

Thay vào (2) ta được

$$\frac{9y^2}{2} + 3y^2 = 30 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 3$$

TH2 :

$$4x + 6y = \sqrt{6xy} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \geq 0 \\ 16x^2 + 48xy + 36y^2 = 6xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \geq 0 \\ 8x^2 + 21xy + 18y^2 = 0 (VL) \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (3;2)$□

Câu 152 $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y \\ x\sqrt{2xy+5x+3} = 4xy-5x-3 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $\sqrt{2xy+5x+3} \geq 0$
Nhận thấy ngay sự thuần nhất của phương trình (1). Tuy nhiên nếu đặt $y = tx$ sẽ ra một phương trình ẩn t không phải là dễ chơi. Tuy nhiên nhận xét ở đây $x = y \geq 0$ thỏa mãn (1). Có thể có đánh giá nào chăng ? Nếu bạn còn nhớ kiểu tách như câu 115 thì sẽ khá đơn giản. Ta làm như sau

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2} \geq \left|\frac{x+y}{2}\right|$$

$$\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{12}(x-y)^2} \geq \left|\frac{x+y}{2}\right|$$

Vậy $VT \geq |x+y| \geq x+y$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y \geq 0$ thay vào (2) ta có

$$x\sqrt{2x^2+5x+3} = 4x^2-5x-3 \Leftrightarrow \left(2x^2+5x+3\right) + x\sqrt{2x^2+5x+3} - 6x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+5x+3} - 2x\right)\left(\sqrt{2x^2+5x+3} + 3x\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x+3} = 2x \Leftrightarrow x = 3, y = 3$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (3;3)\square$

Câu 153 $\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} = \dfrac{9x}{5} \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{3x+5}{30-6y} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \neq 0, y \neq 5, x^2 \geq y^2$
Một câu hệ thuộc loại khá khó chơi. Ta sẽ khai thác từ (2). Suy ra

$$y = \frac{30x}{9x+5} \Leftrightarrow 9x+5 = \frac{30x}{y} \Leftrightarrow \frac{9x}{5} = \frac{6x}{y} - 1$$

Thế lên (1) đồng thời chút ít biến đổi ta được

$$\frac{\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}{x^2-(x^2-y^2)} = \frac{6x-y}{y} \Leftrightarrow 2x^2-y^2+2x\sqrt{x^2-y^2} = 6xy-y^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x+\sqrt{x^2-y^2} = 3y \Rightarrow x^2-y^2 = 9y^2-6xy+x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0(L) \\ x = \dfrac{5}{3}y \end{array}\right.$$

Với $x = \dfrac{5}{3}y$ dễ dàng giải ra $x = 5, y = 3$ (TM)
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (5;3)\square$

Câu 154 $\begin{cases} \sqrt{3+2x^2y-x^4y^2}+x^2(1-2x^2)=y^4 \\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2}+x^2(x^4-2x^2-2xy^2+1)=0 \end{cases}$

Giải

Trừ 2 phương trình cho nhau ta được

$$\sqrt{4-(x^2y-1)^2}=1+\sqrt{1+(x-y)^2}+(x^3-y^2)^2$$

Dễ thấy $VT \le 2 \le VP$
Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1)\square$

Câu 155 $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9} \end{cases}$

Giải

Bài toán xuất hiện trong đề VMO-2009. Bài này yêu cầu cần một chút kiến thức về bất đẳng thức mới có thể giải quyết được
Điều kiện : $0\le x,y\le \dfrac{1}{2}$
Đặt $a=\sqrt{2}x, b=\sqrt{2}y$, $a,b\in\left[0;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Ta có

$$VT=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\sqrt{2\left(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\right)}$$

Ta sử dụng bổ đề với $a,b>0$ và $ab\le 1$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\le\frac{2}{1+ab}$$

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương $\dfrac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)}\le 0$ (Đúng)
Vậy

$$VT\le\frac{2}{\sqrt{1+ab}}=VP$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y$ thay vào (2) và ta dễ dàng tìm ra
$(x;y)=\left(\dfrac{9-\sqrt{73}}{36};\dfrac{9-\sqrt{73}}{36}\right),\left(\dfrac{9+\sqrt{73}}{36};\dfrac{9+\sqrt{73}}{36}\right)\square$

Câu 156 $\begin{cases} xy - x + y = 3 \\ 4x^3 + 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 5 \end{cases}$

Giải

Bài toán xuất hiện trong một đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi của Đại học Vinh. Đây là một bài toán khá khó và mang tính đánh đố cao về ý tưởng. Có thể sử dụng UCT dạng nâng cao để giải quyết nó nhưng tôi khuyên không nên dùng. Ta làm như sau. Hệ tương đương

$$\begin{cases} 3xy - 3x + 3y = 9 \\ 4x^3 + 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 5 \end{cases}$$

Trừ 2 phương trình trên cho nhau ta được

$$4x^3 + 12x^2 + 12x + 4 = -y^3 + 3xy + 9y$$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^3 + 4y^3 = 3y^3 + 3xy + 9y$$

$$\Leftrightarrow 4(x+1+y)[(x+1)^2 - (x+1)y + y^2] = 3y(y^2 + x + 3)$$

Bước then chốt là đây. Ta thế $x = xy + y - 3$ thay vào vế phải ta có

$$\Leftrightarrow 4(x+y+1)[(x+1)^2 - (x+1)y + y^2] = 3y(y^2 + xy + y - 3 + 3)$$

$$\Leftrightarrow 4(x+y+1)[(x+1)^2 - (x+1)y + y^2] = 3y^2(x+y+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)(2x+2-y)^2 = 0$$

Với $y = -x - 1$ thay vào (1) ta được $x^3 + 3x + 4 = 0$ (Vô nghiệm)

Với $y = 2x + 2$ thay vào (1) ta được $2x^2 + 3x - 1 = 0 \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4} \\ x = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4} \end{array} \right.$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}; \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right), \left(\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}; \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$ $\square$

Thật khó để nghĩ được một phép thế khá ảo như thế kia phải không ? Bài toán này có khá nhiều phiên bản khác, thật ngạc nhiên là cách giải gần như giống hệt phiên bản này. Tôi sẽ giới thiệu thêm một số câu cho bạn đọc.

Câu 157 $\begin{cases} xy - x - y = 1 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương : $\begin{cases} 3xy - 3x - 3y = 3 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7 \end{cases}$

Trừ 2 phương trình trên cho nhau ta được

$$4(x-1)^3 = -y^3 + 3xy + 3y$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)^3+4y^3=3y^3+3xy+3y$$
$$\Leftrightarrow 4(x+y-1)[(x-1)^2-(x-1)y+y^2]=3y(y^2+x+1)$$
$$\Leftrightarrow 4(x+y-1)[(x-1)^2-(x-1)y+y^2]=3y(y^2+xy-y-1+1)$$
$$\Leftrightarrow 4(x+y-1)[(x-1)^2-(x-1)y+y^2]=3y^2(x+y-1)$$
$$\Leftrightarrow (x+y-1)(2x-2-y)^2=0$$

Với $y=1-x$ thay vào (1) ta được $x^2-x+2=0$ (Vô nghiệm)

Với $y=2x-2$ thay vào (1) ta được $2x^2-5x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5-\sqrt{17}}{4} \\ x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{4};\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right),\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{4};\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$ □

Câu 158 $\begin{cases} xy-x+2y=4 \\ 4x^3+24x^2+45x=-y^3+6y-20 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương $\begin{cases} 6y-3x+3xy-12=0 \\ 4x^3+24x^2+45x=-y^3+6y-20 \end{cases}$

Trừ 2 phương trình trên cho nhau ta được

$$4x^3+24x^2+48x+32=-y^3+3xy+12y$$
$$\Leftrightarrow 4(x+2)^3+4y^3=3y^3+3xy+12y$$
$$\Leftrightarrow 4(x+y+2)\left[(x+2)^2-(x+2)y+y^2\right]=3y(y^2+x+4)$$

Thế $x=xy+2y-4$ vào vế phải ta được

$$\Leftrightarrow 4(x+y+2)\left[(x+2)^2-(x+2)y+y^2\right]=3y(y^2+2y+xy-4+4)=3y^2(x+y+2)$$
$$\Leftrightarrow (x+y+2)\left(4(x+2)^2-4(x+2)y+y^2\right)=0$$

Với $y=-x-2$ thay vào (1) ta được $x^2-5x+8=0$ (Vô nghiệm)

Với $y=2x+2$ thay vào (1) ta được $2x^2-7x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{17}-7}{4} \\ x=-\dfrac{\sqrt{17}+7}{4} \end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt{17}-7}{4};\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{17}+7}{4};\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$ □

Câu 159 $\begin{cases} (y-1)\sqrt{x+1} = 3-y \\ (4x+13)\sqrt{x+1} = -y^3 - 6(2x-y) - 7 \end{cases}$

Gợi ý : Đặt $\sqrt{x+1} = a$ sẽ đưa về câu 156

Câu 160 $\begin{cases} x^4 - 2x = y^4 - y \\ (x^2 - y^2)^3 = 3 \end{cases}$

Giải

Bài toán xuất hiện trong một đề thi chọn đội tuyển của trường THPT Chuyên - Đại Học Sư Phạm Hà Nội. Thoạt nhìn qua hình thức của hệ này khá gọn nhẹ. Tuy nhiên đây là một câu thuộc loại rất khó, yêu cầu khả năng biến đổi cao, đặc biệt là sự xuất hiện khá bí ẩn của con số 3 ở phương trình (2).
Đặt $x+y = a, x-y = b$ ta suy ra $(ab)^3 = 3$
Phương trình (1) tương đương : $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = 2x - y$
Giờ hãy đưa hết về a và b. Thì ta có

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2, 2x - y = \frac{a+3b}{2}$$

Thay tất cả vào (1) và ta được

$$ab\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right) = \frac{a+3b}{2} \Leftrightarrow ab(a^2+b^2) = a + 3b$$

Đến đây có vẻ chưa sáng sủa gì hơn ? Thế nhưng, con số 3 bí ẩn kia xuất hiện. Ta thử thay $3 = (ab)^3$ vào xem sao. Khi đó (1) trở thành

$$ab(a^2+b^2) = a + (ab)^3 b \Leftrightarrow a(a^2b + b^3 - 1 - a^2b^4) = 0 \Leftrightarrow a(b^3-1)(1-a^2b) = 0$$

Thành quả đã đến. Giờ đã đơn giản hơn rất nhiều rồi
Với $a = 0$ hiển nhiên vô lí

Với $b = 1 \Rightarrow a = \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = \sqrt[3]{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt[3]{3}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \end{cases}$

Với $a^2b = 1 \Leftrightarrow (ab)a = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow b = (\sqrt[3]{3})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ x - y = (\sqrt[3]{3})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = \left(\dfrac{1+\sqrt[3]{3}}{2}; \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\right), \left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}; -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ □

Tôi sẽ đưa thêm một câu ý tưởng tương tự nhưng mức độ khó hơn một tẹo.

Câu 161 $\begin{cases} x^4 - y^4 = \dfrac{3}{4y} - \dfrac{1}{2x} \\ (x^2 - y^2)^5 + 5 = 0 \end{cases}$

Giải

Đặt $x + y = a, x - y = b$ thì $(ab)^5 = -5$. Phương trình đầu tương đương

$$4xy(x^4 - y^4) = 3x - 2y \Leftrightarrow 4xy(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = 3x - 2y$$

Ta có

$$4xy = (a+b)(a-b), \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 + (x-y)^2\right) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2), \quad 3x - 2y = \frac{a + 5b}{2}$$

Thay tất cả vào (1) ta được

$$(a+b)(a-b).ab.\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \frac{a + 5b}{2}$$

$$\Leftrightarrow ab(a^4 - b^4) = a + 5b \Leftrightarrow ab(a^4 - b^4) = a - (ab)^5 b$$

$$\Leftrightarrow a(a^4 b - b^5 - 1 + a^4 b^6) = 0 \Leftrightarrow a(b^5 + 1)(a^4 b - 1) = 0$$

TH1 : $a = 0$ hiển nhiên vô lý

TH2 : $b = -1 \Rightarrow a = \sqrt[5]{5} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt[5]{5} \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[5]{5} - 1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt[5]{5} + 1}{2} \end{cases}$

TH3 : $a^4 b = 1 \Leftrightarrow (ab).a^3 = 1 \Leftrightarrow -\sqrt[5]{5}a^3 = 1 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{\sqrt[15]{5}}, b = \sqrt[15]{5^4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\dfrac{1}{\sqrt[15]{5}} \\ x - y = \sqrt[15]{5^4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[15]{5^5} - 1}{2\sqrt[15]{5}} \\ y = -\dfrac{\sqrt[15]{5^5} + 1}{2\sqrt[15]{5}} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{\sqrt[5]{5} - 1}{2}; \dfrac{\sqrt[5]{5} + 1}{2}\right), \left(\dfrac{\sqrt[15]{5^5} - 1}{2\sqrt[15]{5}}; -\dfrac{\sqrt[15]{5^5} + 1}{2\sqrt[15]{5}}\right)$ □

Câu 162 $\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) = 0 \end{cases}$

Giải

Đây là câu VMO-2010. Lời giải ngắn gọn của nó sẽ là

$$PT(1) - 8.PT(2) \Leftrightarrow (x-2)^4 = (y-4)^4$$

Đến đây dễ dàng tìm nghiệm : $(x; y) = (4; 2), (-4; -2)\square$

Câu hỏi đặt ra ở đây là sử dụng UCT. Tôi xin trình bày 2 cách sau đây.
Cách 1 : Tìm quan hệ tuyến tính dựa vào nghiệm
Dễ thấy cặp nghiệm của hệ là (4,2) và (-4,-2) nên ta nghĩ quan hệ ở đây là $x = 2y$. Thay vào hệ và ta rút ra

$$5\left(y^2+4\right).PT(1) - 2y.PT(2)$$

Tuy nhiên, nhìn vào đấy dễ dàng thấy đây là một cách khá trâu bò. Ở đây ta đặt $x = \pm y + t$ để giảm bậc của (1) xuống bậc 3 đồng thời (2) vẫn là bậc 3.
Vì cặp nghiệm là (4,2) và (-4,-2) nên ta nghĩ đến $x = 6 - y$ hoặc $x = -6 - y$ Với $x = 6 - y$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases} -24\left(y-2\right)\left(y^2-7y+22\right) = 0 \\ -3\left(y-2\right)\left(y^2-7y+22\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow PT(1) - 8PT(2) \leftrightarrow (x+y-6)(x-y+2)\left((x-2)^2+(y-4)^2\right)$$

Với $x = -6 - y$ ta không tìm ra k là hằng số nên loại.
Cách 2 : Nhận xét các biến x, y độc lập với nhau nên ta hi vong đưa về được hằng đẳng thức
Như vậy ta sẽ tìm số k sao cho

$$PT(1) + k.PT(2) \Leftrightarrow (x+\alpha)^4 - (y+\beta)^4 = 0$$

Cân bằng hệ số ta được $\begin{cases} k = -8 \\ \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases}$
Vậy $PT(1) - 8PT(2) \Leftrightarrow (x-2)^4 = (y-4)^4$.

OK rồi chứ ? Tôi lại đưa thêm một ví dụ nữa cho bạn đọc

Câu 163 $\begin{cases} x^4 - y^4 = 1215 \\ 2x^3 - 4y^3 = 9(x^2-4y^2) - 18(x-8y) \end{cases}$

Gợi ý : $PT(1) - 6.PT(2) \Leftrightarrow (x-3)^4 = (y-6)^4$
Nghiệm : $(x; y) = (-6; -3), (6; 3)\square$

Câu 164 $\begin{cases} xy - x + y = 2 \\ x^3 - 4x^2 + x + 18 = 2y^3 + 5y^2 - y \end{cases}$

Giải

Để mới mẻ một chút tôi xin dùng phương pháp chân quê nhất có thể, đó là thế trâu bò.
Từ (1) thấy ngay $x = -1$ không là nghiệm và ta suy ra $y = \dfrac{x+2}{x+1}$ thế xuống (2) ta được

$$x^3 - 4x^2 + x + 18 = 2\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^3 + 5\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 - \frac{x+2}{x+1}$$

Rút gọn ta đưa về một phương trình bậc 6 như sau

$$x^6 - x^5 - 8x^4 + 4x^3 + 20x^2 - 4x - 16 = 0$$

Một phương trình bậc 6 đầy đủ. Chí ít ta mong rằng sẽ tìm ra ít nhất 2 nghiệm để có thể rút gọn xuống bậc 4.Ở đây dùng Casio sẽ rút ra được 2 nghiệm $x = \pm\sqrt{2}$. Vậy đã có nhân tử là $x^2 - 2$ rồi. Phương trình trở thành

$$(x^2 - 2)(x^4 - x^3 - 6x^2 + 2x + 8) = 0$$

Giờ ta xét phương trình $x^4 - x^3 - 6x^2 + 2x + 8 = 0$. Tôi sẽ trình bày coi như là phương pháp giải phương trình bậc 4 tổng quát luôn cho bạn đọc.
Trước hết hãy đưa các phần tử $x^4 - x^3$ tống hết vào trong một bình phương, phần còn lại đẩy sang phải. Tức là

$$x^4 - x^3 + \frac{x^2}{4} = \frac{25x^2}{4} - 2x - 8 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{25x^2}{4} - 2x - 8$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{x}{2} + k\right)^2 = k^2 + 2k\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) + \frac{25x^2}{4} - 2x - 8$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{x}{2} + k\right)^2 = \left(2k + \frac{25}{4}\right)x^2 - (k+2)x + k^2 - 8$$

Ta phải tìm k để vế phải trở thành bình phương. Tức là $\Delta_x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (k+2)^2 = 4\left(2k + \frac{25}{4}\right)(k^2 - 8) \Leftrightarrow k = -3, k = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$$

Tất nhiên ta chọn giá trị đẹp nhất là $k = -3$. Thay vào phương trình ta có

$$\left(x^2 - \frac{x}{2} - 3\right)^2 = \frac{x^2}{4} - x + 1$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{x}{2} - 3\right)^2 = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$$

Đến đây dễ dàng tìm ra $x = \{\pm\sqrt{2}; \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}\}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2}), \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}; \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}\right)$ $\square$

Câu 165 $\begin{cases} x - y - 1 = 2\sqrt{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \dfrac{(2x - 5y)^2}{x - y} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x, y \geq 0, x \neq y$
Từ (1) ta có $x = \left(\sqrt{y} + 1\right)^2$ thay vào (2) tương đương

$$\sqrt{y} + 1 + \sqrt{y} = \frac{\left[2\left(\sqrt{y} + 1\right)^2 - 5y\right]^2}{\left(\sqrt{y} + 1\right)^2 - y} \Leftrightarrow (2\sqrt{y} + 1)^2 = (4\sqrt{y} + 2 - 3y)^2$$

Đặt $2\sqrt{y}+1=a, 3y=b$ thì phương trình đã cho tương đương

$$a^2=(2a-b)^2 \Leftrightarrow 3a^2-4ab+b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ 3a=b \end{array}\right.$$

Với $a=b \Leftrightarrow 3y=2\sqrt{y}+1 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=4$
Với $3a=b \Leftrightarrow y=2\sqrt{y}+1 \Leftrightarrow y=3+2\sqrt{2} \Rightarrow x=6+4\sqrt{2}$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(4;1),(6+4\sqrt{2};3+2\sqrt{2})\Box$

Câu 166 $\left\{\begin{array}{l} 16x^2y^2-17y^2=-1 \\ 4xy+2x-7y=-1 \end{array}\right.$

Giải

Ta thực hien biến đổi (2) như sau

$$(2) \Leftrightarrow 4xy+1=7y-2x \Rightarrow 16x^2y^2+8xy+1=4x^2-28xy+49y^2$$

$$\Leftrightarrow 17y^2+8xy=4x^2-28xy+49y^2 \Leftrightarrow 4(x^2-9xy+8y^2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=8y \end{array}\right.$$

Với $x=y$ thay vào (2) ta có $4x^2-5x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1(TM) \\ x=\dfrac{1}{4} \Rightarrow y=\dfrac{1}{4}(TM) \end{array}\right.$

Với $x=8y$ thay vào (2) ta có $32y^2-9y+1=0(VL)$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1),\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)\Box$

Câu 167 $\left\{\begin{array}{l} 2-\sqrt{x^2y^4+2xy^2-y^4+1}=2(3-\sqrt{2}-x)y^2 \\ \sqrt{x-y^2}+x=3 \end{array}\right.$

Giải

Điều kiện : $x \geq y^2, x^2y^4+2xy^2-y^4+1 \geq 0$
Rõ ràng không làm ăn được gì từ (2). Cũng lắm khai thác được cái điều kiện. Ta sẽ khai thác (1). Biến đổi ta sẽ được

$$\sqrt{(xy^2+1)^2-y^4}=2[xy^2+1-(3-\sqrt{2})y^2]$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(xy^2+1)^2}{y^4}-1}=2\left(\frac{xy^2+1}{y^2}-(3-\sqrt{2})\right)$$

Đặt $\dfrac{xy^2+1}{y^2}=t>0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{t^2-1}=2t-2(3-\sqrt{2}) \Leftrightarrow t=3 \Leftrightarrow xy^2+1=3y^2 \Rightarrow y^2=\frac{1}{3-x}$$

Thay xuống (2) ta được

$$\sqrt{x-\frac{1}{3-x}}+x=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow y=\pm 1 \\ x=4-\sqrt{2} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\sqrt{2}+1} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(2;1),(2;-1),\left(4-\sqrt{2};\sqrt{\sqrt{2}+1}\right),\left(4-\sqrt{2};-\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)$ □

Câu 168 $\begin{cases} x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0 \\ 17(x^4+y^4-14y^2+49)-(x+2y)^4=-8(xy+7)(x^2+2xy+4y^2-14) \end{cases}$

Giải

Hình thức của bài hệ quá khủng bố. Thoạt nhìn ta thấy hệ có 1 phương trình là tam thức bậc 2. Vậy ta thử xem liệu có thể phân tích thành nhân tử được không ? Ở đây không được, Δ_x quá xấu. Vậy phải quay sang (2)
Phương trình (2) tương đương với

$$17\left(x^4+(y^2-7)^2\right)=(x+2y)^4-8(xy+7)\left((x+2y)^2-2(xy+7)\right)$$
$$\Leftrightarrow 17\left(x^4+(y^2-7)^2\right)=(x+2y)^4-8(xy+7)(x+2y)^2+16(xy+7)^2$$
$$\Leftrightarrow 17\left(x^4+(y^2-7)^2\right)=\left((x+2y)^2-4(xy+7)^2\right)$$
$$\Leftrightarrow 17\left(x^4+(y^2-7)^2\right)=(x^2+4y^2-28)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ cho vế trái ta có

$$VT=(1^2+4^2)\left(x^4+(y^2-7)^2\right)\geq (x^2+4(y^2-7)^2)=VP$$

Đẳng thức xảy ra khi $4x^2=y^2-7$ kết hợp với (1) ta lập một hệ mới

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0 \\ 4x^2=y^2-7 \end{cases}$$

Thoạt nhìn đây đúng là hệ gồm 2 tam thức bậc 2 và ta sẽ giải bằng hệ số bất định. Tuy nhiên, hằng số k ở đây tìm được quá lẻ, và ta sẽ xoay sang hướng khác đó là đánh giá.
Viết lại phương trình đầu như sau

$$\begin{cases} x^2+x(y-3)+y+(y-2)^2=0 \\ y^2+(x-4)y+x^2-3x+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_x\geq 0 \\ \Delta_y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq \dfrac{4}{3} \\ 1\leq y\leq \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Với điều kiện kia thì rõ ràng $y^2-7\leq \left(\dfrac{7}{3}\right)^2-7<0\leq 4x^2$

Vậy hệ đã cho vô nghiệm □

Câu 169 $\begin{cases} \dfrac{2xy + y\sqrt{x^2 - y^2}}{14} = \sqrt{\dfrac{x+y}{2}} + \sqrt{\dfrac{x-y}{2}} \\ \sqrt{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3} + \sqrt{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^3} = 9 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \leq min\{\pm x\}$
Với hình thức bài hệ như này ta thấy ngay cần phải đặt ẩn phụ
Đặt $\sqrt{\dfrac{x+y}{2}} = a \geq 0, \sqrt{\dfrac{x-y}{2}} = b \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = a^2 + b^2 \\ y = a^2 - b^2 \end{cases}$
Như vậy thay vào (1) ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right) + 2\left(a^2-b^2\right)ab}{14} = a + b$$

$$\Leftrightarrow 7(a+b) = \left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right) + \left(a^2-b^2\right)ab$$

$$\Leftrightarrow 7 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) \Rightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 7 \\ a^3 + b^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (5; 3)\square$

Câu 170 $\begin{cases} x^3y + x^3 + xy + x = 1 \\ 4x^3y^2 + 4x^3 - 8xy - 17x = -8 \end{cases}$

Giải

Một bài hệ yêu cầu khả năng rút thế tương đối tốt.

Hệ đã cho tương đương $\begin{cases} x^3(y+1) + x(y+1) = 1 \\ 4x^3(y^2+1) - 8x(y+1) = 9x - 8 \end{cases}$
Từ PT(1) ta thế $x(y+1) = 1 - x^3(y+1)$ vào PT(2) và ta có

$$(2) \Leftrightarrow 4x^3(y^2+1) - 8[1 - x^3(y+1)] = 9x - 8$$

$$\Leftrightarrow 4x^3(y^2 + 1 + 2y + 2) = 9x \Leftrightarrow 4x^2[(y+1)^2 + 2] = 9(*)$$

Vì dễ thấy $x = 0$ không là nghiệm nên ta rút gọn ra (*)
Mà từ phương trình (1) ta lại rút ra được $y + 1 = \dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$. Vậy (*) trở thành

$$4x^2\left[\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} + 2\right] = 9 \Leftrightarrow \frac{4}{(x^2+1)^2} + 8x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2} \\ x = -1 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(1; -\dfrac{1}{2}\right), \left(-1; -\dfrac{3}{2}\right)\square$

Câu 171 $\begin{cases} \left(\dfrac{1-x^2}{x^2}\right)^3 + xy + \dfrac{3}{2} = y^3 \\ (xy+2)^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2y + \dfrac{4}{x} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \neq 0$
Phương trình (2) tương đương

$$\left(xy + 2 - \frac{1}{x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{1}{x} - 2 \\ y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \end{cases}$$

Thay tất cả vào (1) ta được

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)^3 \Leftrightarrow \left(t^2 - 1\right)^3 + t - \frac{1}{2} = (t^2 - 2t)^3$$

$$\Leftrightarrow (2t-1)\left(6t^4 - 12t^3 + 2t^2 + 4t + 3\right) = 0$$

TH1 : $t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{4}$
TH2 :

$$6t^4 - 12t^3 + 2t^2 + 4t + 3 = 0$$

Sử dụng phương pháp tôi nêu ở câu 164 sẽ đưa về

$$6\left(t^2 - t - \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3}(VL)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(2; -\dfrac{3}{4}\right)$ □

Câu 172 $\begin{cases} x(x^2-y^2) + x^2 = 2\sqrt{(x-y^2)^3} \\ 76x^2 - 20y^2 + 2 = \sqrt[3]{4x(8x+1)} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq y^2 \geq 0$
Phương trình (1) tương đương

$$x^3 + x(x-y^2) - 2\sqrt{(x-y^2)^3} = 0$$

Đặt $\sqrt{x-y^2} = u$ thì phương trình (1) trở thành

$$x^3 + xu^2 - 2u^3 = 0 \Leftrightarrow x = u \Leftrightarrow y^2 = x - x^2$$

Thay xuống (2) ta được

$$96x^2 - 20x + 2 = \sqrt[3]{32x^2 + 4x}$$

Nếu đối với những ai giải tốt phương trình vô tỷ thì sẽ nhận ra ngay dạng bài này thường sử dụng phương pháp đánh giá. Nhận thấy $x = \dfrac{1}{8}$ là nghiệm và chú ý $x \geq 0$. Ta có hướng tách như sau.

$$96x^2 - 20x + 2 = \sqrt[3]{32x^2 + 4x} = \sqrt[3]{1.1.(32x^2 + 4x)} \leq \frac{32x^2 + 4x + 2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(96x^2 - 20x + 2) \leq 32x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow (16x - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{7}}{8}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{1}{8}; \pm\dfrac{\sqrt{7}}{8}\right)$ $\square$

Tôi giới thiệu thêm một câu gần tương tự nhưng khó hơn.

Câu 173 $\begin{cases} y^2 + (4x - 1)^2 = \sqrt[3]{4x(8x + 1)} \\ 40x^2 + x = y\sqrt{14x - 1} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq \dfrac{1}{14}$

Với điều kiện như thế thì từ (2) hiển nhiên $y > 0$. Ta có đánh giá sau đây

$$40x^2 + x = y\sqrt{14x - 1} \leq \frac{y^2 + 14x - 1}{2} \Leftrightarrow y^2 \geq 80x^2 - 12x + 1$$

TỪ (1) ta lại có

$$\sqrt[3]{4x(8x + 1)} = y^2 + (4x - 1)^2 \geq 80x^2 - 12x + 1 + (4x - 1)^2 = 2(48x^2 - 10x + 1)$$

Đồng thời

$$\sqrt[3]{4x(8x + 1)} = \sqrt[3]{1.1.(32x^2 + 4x)} \leq \frac{1 + 1 + 32x^2 + 4x}{3}$$

Từ đó suy ra

$$2(48x^2 - 10x + 1) \leq \frac{32x^2 + 4x + 2}{3} \Leftrightarrow 2(8x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{1}{8}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\square$

Câu 174 $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x - y - 1} = 1 \\ y^2 + x + 2y\sqrt{x} - y^2x = 0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq 0, x \geq y + 1$

Phương trình (1) tương đương với

$$\sqrt{x} - 1 = \sqrt{x - y - 1} \Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = x - y - 1 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x} - 2$$

Thay vào (2) tương đương

$$4(\sqrt{x}-1)^2+x+4(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}-4(\sqrt{x}-1)^2.x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{4} \\ x=4 \Rightarrow y=2 \\ x=\dfrac{9-\sqrt{17}}{8} \end{array}\right.$$

Nghiệm $x=\dfrac{1}{4}, x=\dfrac{9-\sqrt{17}}{8}$ không thỏa mãn điều kiện bình phương (1).
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(4;2)$$\square$

Câu 175 $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2y+3}+2y-3=0 \\ 2(2y^3+x^3)+3y(x+1)^2+6x(x+1)+2=0 \end{array}\right.$

Giải

Điều kiện : $x^2+2y+3\geq 0$
Phương trình (2) tương đương

$$2(2y^3+x^3)+3y(x+1)^2+6x^2+6x+2=0 \Leftrightarrow 2(x+1)^3+3y(x+1)^2+4y^3=0$$

Rõ ràng đây là một phương trình thuần nhất giữa y và $x+1$. Ở đây ta sẽ rút ra $2y=-(x+1)$ thay vào (1) ta có

$$\sqrt{x^2-x+2}=x+4 \Leftrightarrow x=-\frac{14}{9} \Rightarrow y=\frac{5}{18}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(-\dfrac{14}{9};\dfrac{5}{18}\right)$$\square$

Câu 176 $\left\{\begin{array}{l} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 \end{array}\right.$

Giải

Điều kiện : $x\geq -2, y\leq \dfrac{3}{2}$
Hình thức bài hệ quả thật không đơn giản. Để ý phương trình (1) chia cả 2 vế cho $x^2\neq 0$ sẽ cô lập được x và y, ta hi vọng sẽ ra được điều gì đó

$$(1)\Leftrightarrow 2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}=(4-2y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right)=\left(\sqrt{3-2y}\right)^3+\sqrt{3-2y}$$

Dễ dàng thấy 2 vế có dạng $f(t)=t^3+t$ là hàm đơn điệu tăng. Từ đó suy ra $\sqrt{3-2y}=1-\dfrac{1}{x}$ thay vào (2) ta được

$$x+2-\sqrt[3]{15-x}=1$$

Rõ ràng vế trái đơn điệu tăng nên phương trình này có nghiệm duy nhất $x = 7 \Rightarrow y = \dfrac{111}{98}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(7; \dfrac{111}{98}\right)$ □

Câu 177 $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{8xy}{x+y} = 16 \\ \dfrac{x^2}{8y} + \dfrac{2x}{3} = \sqrt{\dfrac{x^3}{3y} + \dfrac{x^2}{4}} - \dfrac{y}{2} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \neq 0, x + y \neq 0, \dfrac{x^3}{3y} + \dfrac{x^2}{4} \geq 0$

Phương trình (2) tương đương với

$$\frac{x^2}{8y} + \frac{4x+3y}{6} = 2\sqrt{\frac{x^3}{12y} + \frac{x^2}{16}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{8y} + \frac{4x+3y}{6} = 2\sqrt{\frac{x^2}{8y}.\frac{4x}{6} + \frac{x^2}{8y}.\frac{3y}{6}}$$

Nhìn vào biểu thức trên ta thấy để có nghiệm thì $\dfrac{x^2}{8y} \geq 0, \dfrac{4x+3y}{6} \geq 0$. Vậy ta có

$$a + b = 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{x^2}{8y} = \frac{4x+3y}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6y \\ x = -\dfrac{2}{3}.y \end{array}\right.$$

TH1 : $x = 6y$ thay vào (1) ta có

$$37y^2 + \frac{48}{7}y = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{28}{37} \Rightarrow x = -\dfrac{168}{37}(L) \\ y = \dfrac{4}{7} \Rightarrow x = \dfrac{24}{7} \end{array}\right.$$

TH2 : $x = -\dfrac{2}{3}y$ thay vào (1) ta có

$$\frac{4}{9}y^2 + y^2 - 16y = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{12}{13}(L) \\ y = 12 \Rightarrow x = -8(TM) \end{array}\right.$$

Việc loại nghiệm này dựa vào điều kiện để (2) có nghiệm mà tôi nêu ở đoạn trên.

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{24}{7}; \dfrac{4}{7}\right), (-8; 12)$□

Câu 178 $\begin{cases} x^3(3y+55)=64 \\ xy(y^2+3y+3)=12+51x \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 3y+55=\dfrac{64}{x^3} \\ \dfrac{12}{x}+51=y^3+3y^2+3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(y+1\right)+52=\left(\dfrac{4}{x}\right)^3 \\ 3.\dfrac{4}{x}+52=\left(y+1\right)^3 \end{cases}$$

Rõ ràng là một hệ đối xứng. Từ đó ta suy ra $y+1=\dfrac{4}{x} \Leftrightarrow y=\dfrac{4}{x}-1$ thay vào (1) ta có

$$x^3\left(\frac{12}{x}+52\right)=64 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=3$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;3)\square$

Câu 179 $\begin{cases} x^4+2y^3-x=-\dfrac{1}{4}+3\sqrt{3} \\ y^4+2x^3-y=-\dfrac{1}{4}-3\sqrt{3} \end{cases}$

Giải

Bài toán xuất hiện trong 1 đề học sinh giỏi Thái Nguyên. Thoạt nhìn có vẻ khá đối xứng nhưng không dễ như vậy. Cộng 2 phương trình cho nhau ta được

$$x^4+2x^3-x+y^4+2y^3-y=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x)^2-(x^2+x)+\frac{1}{4}+(y^2+y)^2-(y^2+y)+\frac{1}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y^2+y-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-\dfrac{1}{2}=0 \\ y^2+y-\dfrac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Thử lại và ta tìm được nghiệm thỏa mãn là $(x;y)=\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\square$

Câu 180 $\begin{cases} x+6\sqrt{xy}-y=6 \\ x+\dfrac{6(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2(x^2+y^2)}=3 \end{cases}$

Giải

Đây là một bài toán từng xuất hiện trên báo THTT. Ý tưởng của nó là đánh giá. Sau này nó xuất hiện khá nhiều trên diễn đàn và có nhiều lời giải khác. Tôi xin trích dẫn 1 phần lời giải trong tờ báo.
Điều kiện : $xy \geq 0, x^2+y^2 \neq 0$
Nếu $x, y < 0$ thì rõ ràng vế trái của (2) sẽ < 0 và bài toán vô nghiệm.
Vậy $x, y > 0$.
Xét (1) ta có đánh giá sau

$$6 = x+\sqrt{6xy}-y \leq x+3(x+y)-y = 2(2x+y) \Leftrightarrow 2x+y \geq 3(*)$$

Ta lại có các đánh giá sau

$$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow x^2+xy+y^2 \leq \frac{3(x^2+y^2)}{2} \Leftrightarrow \frac{3(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{2(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$$

Giờ ta lại chứng minh $\dfrac{2(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \geq \sqrt{2(x^2+y^2)} \Leftrightarrow 2(x^3+y^3)^2 \geq (x^2+y^2)$
Theo bất đẳng thức *Holder* ta có

$$2(x^3+y^3)^2 = (1^3+1^3)(x^3+y^3)(x^3+y^3) \geq (x^2+y^2)^3$$

Vậy ta có : $\dfrac{3(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2} \geq \dfrac{2(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \geq \sqrt{2(x^2+y^2)}$
Giờ xét phương trình (2) ta có

$$3 = x+\frac{6(x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2(x^2+y^2} \geq x+2\sqrt{2(x^2+y^2)}-\sqrt{2(x^2+y^2)}$$
$$= x+\sqrt{2(x^2+y^2)} \geq x+x+y = 2x+y$$

Vậy ta lại có $2x+y \leq 3(**)$
Từ (*),(**) ta có $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1)\square$

2.7 Câu 181 đến câu 210

Câu 181 $\begin{cases} 2y^2-9y-\dfrac{4}{x}=-2 \\ 4\sqrt{x+1}+xy\sqrt{y^2+4}=0 \end{cases}$

Giải

Đây là 1 bài toán mà ý tưởng xét hàm được giấu khá kín.
Điều kiện : $-1 \leq x \neq 0$
Nhận thấy $x=-1$ hoặc $y=0$ không là nghiệm của phương trình. Phương trình (2) tương đương

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{-4}{y\sqrt{y^2+4}}\Leftrightarrow\frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}}=\frac{y^2-(y^2+4)}{y\sqrt{y^2+4}}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}-\frac{\sqrt{y^2+4}}{y}$$

Đến đây ta thấy ngay hàm cần xét là $f(t)=t-\dfrac{1}{t}$ và hàm này đơn điệu tăng. Từ đó suy ra

$$\sqrt{x+1}=\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\Rightarrow x+1=\frac{y^2}{y^2+4}\Leftrightarrow x=\frac{-4}{y^2+4}\Leftrightarrow\frac{-4}{x}=y^2+4$$

Thay lại vào (1) ta được

$$3y^2-9y+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\Rightarrow x=-\frac{4}{5}(TM)\\ y=2\Rightarrow x=-\frac{1}{2}(TM)\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(-\frac{4}{5};1\right),\left(-\frac{1}{2};2\right)\square$

Câu 182 $\begin{cases}\sqrt[3]{y^3-1}+\sqrt{x}=3\\ x^2+y^3=82\end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y\geq 0$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases}\sqrt[3]{y^3-1}=\dfrac{9-x}{3+\sqrt{x}}\\ y^3-1=(9-x)(9+x)\end{cases}\Rightarrow(9-x)\,(9+x).\sqrt[3]{y^3-1}=(y^3-1)\frac{(9-x)}{3+\sqrt{x}}$$

TH1 : $y=1\Rightarrow x=9$
TH2 : $x=9\Rightarrow y=1$
TH3 : $(9+x)(3+\sqrt{x})=\left(\sqrt[3]{y^3-1}\right)^2$
Rõ ràng vô nghiệm vì $VT\geq 27$ còn $\sqrt[3]{y^3-1}\leq 3$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(9;1)\square$

Câu 183 $\begin{cases}x+2(y-\sqrt{x-1})=\dfrac{19}{5}+\dfrac{1}{y^2+1}\\ \sqrt{2x+y-2}+\sqrt{y-x+1}=3\end{cases}$

Giải

Điều kiện : $2x+y-2\geq 0, y-x+1\geq 0, x\geq 1$
Phương trình (1) tương đương

$$\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+2y=\frac{19}{5}+\frac{1}{y^2+1}$$

Nếu $y>2$ thì ta có $VT>4>VP$. Vậy $y\le 2$
Ta đánh giá phương trình (2) như sau

$$VT=\sqrt{2x+y-2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2y-2x+2}\le\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)3y}\le 3$$

Đẳng thức xảy ra khi $y=2\Rightarrow x=2$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(2;2)\square$

Trải qua khá nhiều những câu hệ sử dụng đánh giá, ta mới thấy phương pháp này khó và cần kĩ năng biến đổi tốt như thế nào.

Câu 184 $\begin{cases}2x^2+xy=1\\ \dfrac{9x^2}{2(1-x)^4}=1+\dfrac{3xy}{2(1-x)^2}\end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x\ne 1$
Một bài toán khá đặc sắc và lời giải cũng sáng tạo.
Đặt $\dfrac{-3x}{2(1-x)^2}=u$ ta lập thành một hệ mới như sau

$$\begin{cases}2x^2+yx-1=0\\2u^2+yu-1=0\end{cases}$$

Đến đây có vẻ đối xứng rồi. Nhưng ta không trừ 2 phương trình cho nhau mà có đánh giá như sau
Rõ ràng x và u là 2 nghiệm phân biệt của phương trình $X^2+yX-1=0$. Hiển nhiên vì tích $c.a$ là trái dấu. Theo hệ thức $Vi-et$ ta có

$$xu=\frac{c}{a}\Leftrightarrow x.\frac{-3x}{2(1-x)^2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\Rightarrow y=2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};2\right),\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};2\right)\square$

Câu 185 $\begin{cases}4x^2y^2+xy^2+4xy-3y^3+1=7y^2\\3xy-3y^2-y+1=0\end{cases}$

Giải

Một chút biến đổi ta đưa hệ đã cho về thành

$$\begin{cases}(2xy+1)^2=7y^2+3y^3-xy^2\\2xy+1=y+3y^2-xy\end{cases}\Rightarrow(y+3y^2-xy)^2=7y^2+3y^3-xy^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 0 \\ (1+3y-x)^2 = 7+3y-x \end{array}\right.$$

TH1 : $y^2 = 0$ vô nghiệm

TH2 : $(1+3y-x)^2 = 7+3y-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3y-x=-3 \\ 3y-x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3y+3 \\ x=3y-2 \end{array}\right.$

Với mỗi trường hợp này thay vào (2) và ta dễ dàng tìm ra nghiệm

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (1;1), \left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{6}\right), \left(1 \pm \sqrt{\dfrac{5}{2}};\dfrac{-4 \pm \sqrt{10}}{6}\right)$ $\square$

Câu 186 $\begin{cases} x\sqrt{x^2+6} + y\sqrt{x^2+3} = 7xy \\ x\sqrt{x^2+3} + y\sqrt{y^2+6} = x^2+y^2+2 \end{cases}$

Giải

Đây là một bài toán tổng hợp khá nhiều các kĩ năng vào làm một.
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x\left(\sqrt{y^2+6}+y\right) + y\left(\sqrt{x^2+3}+x\right) = 9xy \\ x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right) + y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y^2+6}+y}{y} + \dfrac{\sqrt{x^2+3}+x}{x} = 9 \\ x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right) + y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right)} + \dfrac{3}{x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)} = 9 \\ x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right) + y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right) = 2 \end{cases}$$

Đặt $x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right) = a, y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right) = b$. Hệ trở thành

$$\begin{cases} \dfrac{6}{b} + \dfrac{3}{a} = 9 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1, b=1 \\ a=\dfrac{2}{3}, b=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

TH1 : $\begin{cases} x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right) = 1 \\ y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

TH2 : $\begin{cases} x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right) = \dfrac{2}{3} \\ y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right) = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{\sqrt{15}} \\ y=2\sqrt{\dfrac{2}{15}} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(1;\dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{2}{\sqrt{15}};2\sqrt{\dfrac{2}{15}}\right)$ $\square$

Câu 187 $\begin{cases} (x+y)^2+3x+2y+4=3\sqrt[3]{4x-4} \\ 2(y+1)^2\left(y+1-\sqrt[3]{18x-x^3}\right)=17\left(\sqrt{x-2}\right)^2-35-10x^2 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq 2$

Nhìn vào ta thấy phương trình (2) quá khủng bố, gần như không thể làm ăn được một chút nào. Nhưng hãy để ý một chút, có một phần tử khá đặc biệt đó là $17\left(\sqrt{x-2}\right)^2$. Đã căn lại còn bình phương !! Phải chăng tác giả cố ý để vậy nhằm tạo điều kiện cho x để đánh giá một cái gì đó chăng ? Có lẽ là từ phương trình (1).

Ta thực hiện đánh giá phương trình (1) như sau

$$(x+y)^2+3x+2y+4=3\sqrt[3]{2.2.(x-1)}\leq 2+2+x-1=x+3$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2+2x+2y+1\leq 0 \Leftrightarrow (x+y+1)^2\leq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=3$ và $y=-4$. Thay lại vào phương trình (2) thấy thỏa mãn

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(3;-4)\square$

Câu 188 $\begin{cases} x^2-(y+3)x+y^2+2=0 \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^4-2\left(\dfrac{x}{y}\right)^3+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\dfrac{4-3x}{y^2}-1-\dfrac{4-6x}{y^4}=0 \end{cases}$

Giải

Hướng giải của nó khá giống câu 185.

Điều kiện : $y\neq 0$

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^2-xy=3x-y^2-2 \\ x^4-2x^3y+x^2y^2=(4-3x)y^2+y^4+4-6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy=3x-y^2-2 \\ \left(x^2-xy\right)^2=(4-3x)y^2+y^4+4-6x(*) \end{cases}$$

$$(*)\Leftrightarrow \left(3x-y^2-2\right)^2=(4-3x)y^2+y^4+4-6x$$

$$\Leftrightarrow 9x^2+y^4+4-6xy^2-12x+4y^2=(4-3x)y^2+y^4+4-6x$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-3xy^2-6x=0\Leftrightarrow 3x(3x-y^2-2)=0$$

Đến đây ta thế lại $3x-y^2-2=x^2-xy$ từ (1) vào phương trình trên sẽ được :

$$3x^2(x-y)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y^2+2=0(VL) \\ x=y\Rightarrow y^2-3y+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x=1 \\ y=x=2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1),(2;2)\square$

Câu 189 $\begin{cases} x^2+xy+x+3=0 \\ (x+1)^2+3(y+1)+2\left(xy-\sqrt{x^2y+2y}\right)=0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \geq 0$

$$PT(2)-2.PT(1) \Leftrightarrow -(x^2+2)+3y=2\sqrt{(x^2+2)y}$$

Đặt $\sqrt{x^2+2}=a>0, \sqrt{y}=b\geq 0$. Phương trình trở thành

$$-a^2+3b^2=2ab \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b\Rightarrow y=x^2+2 \\ a=-3b(L) \end{array}\right.$$

Thay trở lại (1) ta dễ dàng tìm ra được nghiệm.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(-1;3)\square$

Câu 190 $\begin{cases} x^3y=9 \\ 3x+y=6 \end{cases}$

Giải

Hình thức bài hệ quá đơn giản. Ta có thể chọn cách thế từ (2) lên (1) để giải phương trình bậc 4. Tuy nhiên, chỉ với đánh giá khá đơn giản, ta có thể giải quyết nhanh bài này.
Nhận thấy giả sử hệ có nghiệm thì $x,y>0$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho phương trình (2) ta có

$$3x+y=x+x+x+y\geq 4\sqrt[4]{x^3y}=4\sqrt{3}>6$$

Vậy hệ đã cho vô nghiệm $\square$

Câu 191 $\begin{cases} (x^2+y^2)(x+y+1)=25(y+1) \\ x^2+xy+2y^2+x-8y=9 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y+1}(x+y+1)=25 \\ x^2+y^2+x(y+1)+(y+1)^2=10\,(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y+1}(x+y+1)=25 \\ \dfrac{x^2+y^2}{y+1}+(x+y+1)=10 \end{cases}$$

Đặt $\dfrac{x^2+y^2}{y+1}=a, x+y+1=b$ ta có

$$\begin{cases} ab=25 \\ a+b=10 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5\,(y+1) \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, y=1 \\ x=-\dfrac{3}{2}, y=\dfrac{11}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(3;1), \left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{11}{2}\right)\square$

Câu 192 $\begin{cases} 4x^3 + 4y^3 = 3x^2y + 2\sqrt{3}xy + 2x \\ x^2 = y^2 + 1 \end{cases}$

Giải

Đây là một câu thuộc loại khó. Mang tính đánh đố một chút. Để ý một chút phương trình (2) nhìn khá giống một hằng đẳng thức lượng giác đó là $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Vậy ta đặt $x = \dfrac{1}{\cos a} \Rightarrow y = \tan a$ với $a \in [0; \pi]$. Thay tất cả vào phương trình (1) ta được

$$\frac{4}{\cos^3 a} + 4\tan^3 a = \frac{3}{\cos^2 a}\tan a + 2\sqrt{3}\frac{1}{\cos a}.\tan a + \frac{2}{\cos a}$$
$$\Leftrightarrow 4 + 4\sin^3 a = 3\sin a + 2\sqrt{3}\sin a\cos a + 2\cos^2 a$$
$$\Leftrightarrow 3 = \sin 3a + \sqrt{3}\sin 2a + \cos 2a \Leftrightarrow 3 = \sin 3a + 2\sin\left(2a + \frac{\pi}{6}\right)$$

Rõ ràng $VT \geq VP$ và đẳng thức xảy ra khi $a = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ □

Câu 193 $\begin{cases} y^3 + 3xy - 17x + 18 = x^3 - 3x^2 + 13y - 9 \\ x^2 + y^2 + xy - 6y - 5x + 10 = 0 \end{cases}$

Giải

Sử dụng phương pháp hệ số bất định ta sẽ rút ra

$$PT(1) - 3.PT(2) \Leftrightarrow (y-1)^2 + 2(y-1) = x^3 + 2x \Leftrightarrow x = y - 1$$

Đến đây dễ rồi !
P/S : Thực ra với bài này ta nhân 3 vào PT(2) rồi trừ đi có thể do 1 chút kinh nghiệm nhằm loại bỏ xy đi chứ không nhất thiết phải sử dụng đến hệ số bất định.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 2), \left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{8}{2}\right)$ □

Câu 194 $\begin{cases} (x + y - 3)^3 = 4y^3\left(x^2y^2 + xy + \dfrac{45}{4}\right) \\ x + 4y - 3 = 2xy^2 \end{cases}$

Giải

Từ phương trình (2) ta rút ra : $x + y - 3 = 2xy^2 - 3y$
Thay vào phương trình (1) ta được

$$y^3(2xy - 3)^3 = 4y^3\left(x^2y^2 + xy + \frac{45}{4}\right)$$

TH1 : $y = 0 \Rightarrow x = 3$
TH2 : $(2xy-3)^3 = 4\left(x^2y^2 + xy + \dfrac{45}{4}\right) \Leftrightarrow xy = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{y}$
Đến đây thay lại vào (2) dễ dàng tìm ra nghiệm.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (3;0), \left(\dfrac{3-\sqrt{73}}{2}; \dfrac{-3-\sqrt{73}}{8}\right), \left(\dfrac{3+\sqrt{73}}{2}; \dfrac{-3+\sqrt{73}}{8}\right)$ □

Câu 195 $\begin{cases} 2x + \sqrt{2 - x + y - x^2 - y^2} = 1 \\ 2x^3 = 2y^3 + 1 \end{cases}$

Giải

Chuyển vế và bình phương (1) ta suy ra hệ mới sau

$$\begin{cases} 5x^2 - 3x - 1 = y - y^2 \\ 2x^3 - 2y^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x^3 - 2y^3 = 5x^2 - 3x + y^2 - y$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)(2x^2 - 3x + 2xy + 2y^2 - y) = 0$$

TH1 : $x = y + 1$ thay vào (2) dễ dàng tìm được nghiệm.
TH2 : Kết hợp với phương trình (1) sau khi bình phương ta lập một hệ mới

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 2xy + 2y^2 - y = 0 \\ 5x^2 - 3x + y^2 - y = 1 \end{cases}$$

Đây là hệ gồm 2 tam thức và ta đã biết cách giải bằng phương pháp UCT.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}; \dfrac{-3-\sqrt{3}}{6}\right)$ □

Câu 196 $\begin{cases} \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x\left(1 + 2\sqrt{1 - y^2}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $|x| \le 1, |y| \le 1, xy \ge 0$
Với điều kiện trên ta tiến hành đánh giá

$$VT \le \sqrt{2\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y}\right)} \le \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x\left(1 + 2\sqrt{1 - x^2}\right)$$

Với loại phương trình vô tỷ này lượng giác hóa là cách tốt nhất.
Đặt $x = sint, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Phương trình trở thành

$$\sqrt{1+\cos t} = \sin t(1+2\cos t) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\left(3-4\sin^2\frac{t}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{t}{2} - 4\sin^3\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{3t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ □

Câu 197 $\begin{cases} 2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y \\ y = 2x^2 - 1 + 2xy\sqrt{1+x} \end{cases}$

Giải

Điều kiện $-1 \le x \le 1$
Để ý kĩ thì phương trình (1) có dạng $f(\sqrt{1-x}) = f(y)$ với $f(t) = t^3 + t$ đơn điệu tăng. Tuy nhiên, đến đây chưa phải là hết. Như tôi đã nói ở trước, những hệ kiểu này thường khá nặng về giải phương trình vô tỷ phía sau.
Thay $y = \sqrt{1-x}$ từ (1) xuống (2) và ta thu được

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$$

Đặt $x = \cos t, t \in [0; \pi]$ phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{1-\cos t} = 2\cos^2 t - 1 + 2\cos t\sqrt{1-\cos t}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\frac{t}{2} = \cos 2t + \sin 2t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{t}{2} = \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \\ t \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos\frac{3\pi}{10} \\ y = \sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{20} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\cos\frac{3\pi}{10}; \sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{20}\right)$ □

Câu 198 $\begin{cases} 3(x^3 - y^3) = 4xy \\ x^2y^2 = 9 \end{cases}$

Giải

Một bài hệ không quá khó khăn, chỉ cần chú ý một chút trong phép thế
Từ (2) suy ra $xy = 3$ hoặc $xy = -3$.

Với $xy = 3 \Rightarrow y = \dfrac{3}{x}$, thay tất cả vào (1) ta được

$$x^3 - \left(\frac{3}{x}\right)^3 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 = 2 - \sqrt{31} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2-\sqrt{31}} \Rightarrow y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2-\sqrt{31}}} \\ x^3 = 2 + \sqrt{31} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2+\sqrt{31}} \Rightarrow y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2+\sqrt{31}}} \end{array}\right.$$

Tương tự với trường hợp $xy = -3$. Tuy nhiên trường hợp này vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\sqrt[3]{2-\sqrt{31}}; \dfrac{3}{\sqrt[3]{2-\sqrt{31}}}\right), \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{31}}; \dfrac{3}{\sqrt[3]{2+\sqrt{31}}}\right)$ □

Câu 199 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \sqrt{2}(x-y)(1+4xy) = \sqrt{3} \end{cases}$

Giải

Phương trình đầu khiến ta liên tưởng đến phương pháp lượng giác hóa.
Đặt $x = \sin t, y = \cos t, t \in [0; 2\pi]$. Thay vào phương trình (2) ta được

$$(\sin t - \cos t)(1 + 2\sin 2t) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin t - \cos t + 2\sin 2t \sin t - 2\sin 2t \cos t = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin t - \cos t + \cos t - \cos 3t - \sin 3t - \sin t = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3t + \sin 3t = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{7\pi}{36}; \frac{31\pi}{36}; \frac{55\pi}{36}; \frac{11\pi}{36}; \frac{35\pi}{36}; \frac{39\pi}{36}\right\}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = (\sin t; \cos t)$ với $t \in \left\{\frac{7\pi}{36}; \frac{31\pi}{36}; \frac{55\pi}{36}; \frac{11\pi}{36}; \frac{35\pi}{36}; \frac{39\pi}{36}\right\}$ □

Câu 200 $\begin{cases} \sqrt{5y^4 - x^4} - 6(x^2 - y^2) - 2xy = 0 \\ \dfrac{1}{2}(5y^2 + x^2)^2 - 18 = \sqrt{xy}(6 - 5y^2 - x^2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $xy \geq 0, 5y^4 - x^4 \geq 0$
Một hệ khá hay. Ở đây xét phương trình (2) ta coi $x^2 + 5y^2$ là ẩn chính.
Hệ đã cho tương đương

$$(5y^2 + x^2)^2 + 2\sqrt{xy}(5y^2 + x^2) - 12\sqrt{xy} - 36 = 0$$

$\Delta_{5y^2+x^2} = xy + 12\sqrt{xy} + 36 = (\sqrt{xy} + 6)^2$

Quá tuyệt vời khi nó chính phương. Từ đó ta sẽ tính được

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5y^2=6 \\ x^2+5y^2=-2\sqrt{xy}-6(L) \end{array}\right.$$

Đến đây thay $6=x^2+5y^2$ vào (1) ta được

$$\sqrt{5y^4-x^4}-(x^2+5y^2)(x^2-y^2)=2xy \Leftrightarrow \sqrt{5y^4-x^4}+(5y^4-x^4)=4x^2y^2+2xy$$

Rõ ràng 2 vế đều có dạng $f(t)=t^2+t, t\geq 0$ và hàm này đơn điệu tăng. Từ đó rút ra

$$\sqrt{5y^4-x^4}=2xy \Leftrightarrow x=y$$

Thay vào $x^2+5y^2=6$ ta sẽ giải ra $x=\pm 1, y=\pm 1$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1),(-1;-1)\square$

Câu 201 $\left\{\begin{array}{l} (x-1)\sqrt{y}+(y-1)\sqrt{x}=\sqrt{2xy} \\ x\sqrt{2y-2}+y\sqrt{2x-2}=\sqrt{2xy} \end{array}\right.$

Giải

Một hệ khá đối xứng nhưng khiến nhiều người lúng túng vì căn thức.
Điều kiện : $x,y\geq 1$
Phương trình (2) tương đương

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x}+\frac{\sqrt{y-1}}{y}=1$$

Rõ ràng $\dfrac{\sqrt{1.(x-1)}}{x}\leq\dfrac{1+x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$, tương tự với y. Vậy vế trái ≤ 1. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=2$ thay vào (1) thỏa mãn.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(2;2)\square$

Tiếp theo chúng ta sẽ đến một chùm hệ sử dụng các phép biến đổi đẳng thức. Đây là một kĩ thuật khá khó tuy nhiên nó rất hữu dụng để giải một số loại hệ phương trình. Chỉ bằng một vài phép biến đổi xuất phát từ những đẳng thức quen thuộc mà ta có thể quét dọn được bài hệ. Tuy nhiên phương pháp này khá khó bởi nó yêu cầu khả năng hiểu biết về đẳng thức tương đối tốt đồng thời cần kinh nghiệm và 1 chút tinh quái. Bài viết này tôi trích một phần trong cuốn "Tuyển Tập Phương trình - Hệ phương trình" do diễn đàn Mathscope biên soạn.

Câu 202 $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1+xy \\ \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=1 \end{array}\right.$

Giải

Điều kiện : $x,y\neq -1$
Ta sử dụng kết quả sau : Nếu $x^2-xy+y^2=1$ thì $\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=1$

Chứng minh :

$$x^2-xy+y^2=1 \Leftrightarrow x(x+1)+y(y+1)=xy+x+y+1=(x+1)(y+1) \Leftrightarrow \frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}=1\square$$

Áp dụng vào bài toán trên . Đặt $\frac{x}{y+1}=a, \frac{y}{x+1}=b$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, b=1 \\ a=1, b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=0 \\ x=0, y=1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;0),(0;1)\square$

Câu 203 $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{1}{xy}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-1 \\ \frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}=\frac{x^2-xy+y^2}{xy} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x,y \neq 0,1$

Sử dụng kết quả sau : Nếu $xy=1$ thì $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}=1$.

Chứng minh:

$$xy=1 \Leftrightarrow xy+x+y+1=(x+1)+(y+1) \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=(x+1)+(y+1) \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}=1\square$$

Ta sẽ dùng kết quả này vào bài toán trên.
Phương trình đầu tương đương

$$(xy-1)(x^2+xy+y^2)=0 \Leftrightarrow xy=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}=1\square$$

Phương trình (2) khi đó sẽ tương đương

$$1-\frac{1}{x+1}+1-\frac{1}{y+1}=\frac{x^2-xy+y^2}{xy} \Leftrightarrow 1=\frac{(x-y)^2+xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}+1$$

Vậy suy ra $x=y$ kết hợp $xy=1$ suy ra $x=y=1$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1)\square$

Câu 204 $\begin{cases} \frac{1}{y}-2=\frac{2}{xy^2}-xy \\ \frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{(y+2)^2}=1 \end{cases}$

Giải

Ta sử dụng kết quả sau : Nếu $xy=2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+2}=1$

Chứng minh :

$$xy = 2 \Leftrightarrow xy+2x+y+2 = 2(x+1)+(y+2) \Leftrightarrow (x+1)(y+2) = 2(x+1)+(y+2) \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+2} = 1\square$$

Phương trình thứ nhất tương đương

$$(xy-2)\left(\frac{1}{y^2}+1\right) = 1 \Leftrightarrow xy = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+2} = 1$$

Vậy đặt $\frac{1}{x+1} = a, \frac{2}{y+2} = b$ ta có

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ a^2+b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, b = 1 \\ a = 1, b = 0 \end{array}\right.$$

Ta loại cả 2 trường hợp vì $a, b \neq 0$
Vậy hệ đã cho vô nghiệm $\square$

Câu 205 $\begin{cases} xy+x+y = 3 \\ \dfrac{4}{5y+9}+\dfrac{4}{x+6}+\dfrac{1}{(x+1)(y+2)} = \dfrac{x+1}{2} \end{cases}$

Giải

Ta sử dụng kết quả sau

$$abc = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca} = 1$$

Chứng minh

$$VT = \frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{a+ab+abc}+\frac{ab}{ab+abc+a^2bc} = \frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{a+ab+1} = 1\square$$

Điều kiện : $y \neq \frac{-9}{6}, x \neq -6, (x+1)(y+2) \neq -1$
Đặt $a = x+1, b = y+1, c = \frac{1}{4}$ thì hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} abc = 1 \\ \dfrac{1}{1+b+bc}+\dfrac{1}{1+a+ac}+\dfrac{1}{1+a+ab} = \dfrac{x+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 1, y = 1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (1;1)\square$

Câu 206 $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ x^5+y^5+15xy(x+y)=32 \end{cases}$

Giải

Ta sử dụng đẳng thức : $(x+y)^5 = x^5+y^5+5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$
Sử dụng đẳng thức trên với (2) ta có

$$x^5+y^5+5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)=32 \Leftrightarrow (x+y)^5=32 \Leftrightarrow x+y=2$$

Kết hợp với phương trình (1) ta dễ dàng giải ra $(x;y)=(1;1)$□

Ta sẽ sử dụng đẳng thức này đối với một bài sau đây.

Câu 207 $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{31}{7} \end{cases}$

Giải

Bài này hoàn toàn có thể đưa về dạng thuần nhất bậc 5 được. Tuy nhiên, giải một phương trình bậc 5 thôi nghe thấy đã khiến nhiều người ngán ngẩm. Ta sử dụng một số kết quả sau

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$x^5+y^5=(x+y)^5-5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$$

Điều kiện : $x \neq -y$
Sử dụng kết quả trên vào (2) ta được

$$\frac{(x+y)^4-15xy}{(x+y)^2-3xy}=\frac{31}{7}$$

Tiếp theo từ (1) ta thế $(x+y)^2=3+xy$ vào (2) ta được

$$\frac{(3+xy)^2-15xy}{3-2xy}=\frac{31}{7} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=-2 \\ xy=\dfrac{15}{7} \end{array}\right.$$

Với $xy=-2 \Rightarrow x+y=\pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=-1 \\ x=1, y=-2 \\ x=-2, y=1 \\ x=-1, y=2 \end{array}\right.$

Với $xy=\dfrac{15}{7} \Rightarrow (x+y)^2=\dfrac{36}{7}$ (Loại vì $S^2<4P$)
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(2;-1),(1;-2),(-2;1),(-1;2)$□

Câu 208 $\begin{cases} xy - x = 2 \\ \dfrac{1}{(x+1)^4} + \dfrac{16}{(y+1)^4} = 1 \end{cases}$

Giải

Ta sử dụng kết quả : $xy = x + 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{y+1} = 1$

Chứng minh

$$xy = x + 2 \Leftrightarrow xy + x + y + 1 = 2(x+1) + (y+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y+1) = 2(x+1) + (y+1) \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+1} = 1\Box$$

Áp dụng đối với bài toán trên ta đặt $\dfrac{1}{x+1} = a \neq 0, \dfrac{2}{y+1} = b \neq 0$. Hệ trở thành

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a^4 + b^4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, b = 0(L) \\ a = 0, b = 1(L) \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho vô nghiệm $\Box$

Tiếp theo điểm qua một vài ví dụ về phép thế hằng số để đưa về phương trình đồng bậc. Loại này thực ra tôi đã có nêu một ví dụ đó là câu 17. Giờ ta nghiên cứu một chút về kĩ thuật này.

Câu 209 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x+y)(1+xy)^4 = 32 \end{cases}$

Giải

Để ý $1 + xy = \dfrac{2 + 2xy}{2} = \dfrac{(x+y)^2}{2}$. Đến đây bài toán khá đơn giản.
Phương trình (2) trở thành $(x+y)^9 = 2^9 \Leftrightarrow x + y = 2$
Đến đây kết hợp với (1) dễ dàng giải ra $(x; y) = (1; 1)\Box$

Câu 210 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x+y)(4 - x^2y^2 - 2xy) = 2y^5 \end{cases}$

Giải

Nhận xét phương trình (2) có vế trái là bậc 5. Vế phải gồm bậc 1 và trong ngoặc cao nhất bậc 4 nhưng không phải hạng tử nào cũng có bậc 4. Vậy ta tiến hành thế hằng số bằng biểu thức từ (1) xuống dưới để tạo nên sự thuần nhất.
Thế $2 = x^2 + y^2$ và $4 = (x^2 + y^2)^2$. Vì sao không thế $4 = 2(x^2 + y^2)$. Đơn giản tôi muốn tất cả đều là bậc 4. Thay tất cả vào (2) ta được

$$(x+y)\left((x^2+y^2)^2 - x^2y^2 - xy(x^2+y^2)\right) = 2y^5 \Leftrightarrow x^5 + y^5 = 2y^5 \Leftrightarrow x = y$$

Đến đây kết hợp với (1) và ta dễ dàng giải ra $(x;y) = (1;1), (-1;-1)\square$

2.8 Câu 211 đến câu 240

Câu 211 $\begin{cases} 3x^3 - y^3 = \dfrac{1}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \neq -y$
Phương trình (1) quy đồng sẽ là bậc 4. Vậy ta nghĩ các kết hợp với phương trình (2) để tạo thành một phương trình thuần nhất xem, như thế phương trình (2) sẽ phải là bậc 4 và để làm được điều đó ta bình phương 2 vế lên. Như vậy ta sẽ được

$$(3x^3 - y^3)(x+y) = (x^2+y^2)^2$$
$$\Leftrightarrow 2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 - 2y^4 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y)(2x^2+xy+y^2) = 0$$

TH1 : $2x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0(L)$
TH2 : $x = y$ thay vào (2) ta được

$$2y^2 = 1 \Leftrightarrow x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

TH3 : $x = -2y$ thay vào (2) ta được

$$5y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\square$

Câu 212 $\begin{cases} 81x^3y^2 - 81x^2y^2 + 33xy^2 - 29y^2 = 4 \\ 25y^3 + 9x^2y^3 - 6xy^3 - 4y^2 = 24 \end{cases}$

Giải

Nhận thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 81x^3 - 81x^2 + 33x - 29 = \dfrac{4}{y^2} \\ 25 + 9x^2 - 6x = \dfrac{24}{y^3} + \dfrac{4}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(3x-1)^3 + 2(3x-1) = 24 + \dfrac{4}{y^2} \\ 3.\left(\dfrac{2}{y}\right)^3 + 2.\dfrac{2}{y} = 24 + (3x-1)^2 \end{cases}$$

Đặt $3x - 1 = a, \dfrac{2}{y} = b$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} 3a^3 + 2a = 24 + b^2 \\ 3b^3 + 2b = 24 + a^2 \end{cases} \Rightarrow a = b$$

Thay vào một trong 2 phương trình ta có

$$3a^3 - a^2 + 2a - 24 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow x = 1, y = 1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 1)\square$

Câu 213 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 3 \\ 2(x^3 + y^3) + 6x^2 = 3(x^2 + y^2) + 5 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 3 \\ 2(x^3 + y^3) + 6x^2 = 3(3 - 2x) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ (x+1)^3 + y^3 = 8 \end{cases}$$

Đặt $x + 1 = a, y = b$ hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ a^3 + b^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, b = 0 \Rightarrow x = 1, y = 0 \\ a = 0, b = 2 \Rightarrow x = -1, y = 2 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 0), (-1; 2)\square$

Câu 214 $\begin{cases} x^2 + y^4 + xy = 2xy^2 + 7 \\ -x^2y + 4xy + xy^3 + 11(x - y^2) = 28 \end{cases}$

Giải

Hình thức bài hệ gồm 2 đa thức thuộc loại khủng bố. Với kinh nghiệm gặp loại này, thì thường chỉ có 2 hướng chính đó là phân tích nhân tử hoặc đặt ẩn phụ. Hướng thứ 2 có vẻ đúng khi mà phương trình (1) chuyển vế xuất hiên $(y^2 - x)^2$ mà nó có ở phương trình (2). Hệ đã cho tương đương.

$$\begin{cases} (y^2 - x)^2 = 7 - xy \\ 11(x - y^2) + xy(y^2 - x) = 28 - 4xy \end{cases}$$

Đặt $y^2 - x = a, xy = b$ ta lập hệ mới như sau

$$\begin{cases} a^2 = 7 - b \\ ab - 11a = 28 - 4b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2, b = 3 \\ a = 0, b = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2 - x = 0 \\ xy = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 - x = -2 \\ xy = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt[3]{7}, x = \sqrt[3]{49} \\ y = 1, x = 3 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (3; 1), \left(\sqrt[3]{49}; \sqrt[3]{7}\right)\square$

Ở câu tiếp theo tôi sẽ cài thêm một bài viết ngắn khá hay.

Câu 215 $\begin{cases} x^3+3x^2+4x+2=y+\sqrt[3]{y} \\ x^3-\sqrt{3}x^2+3\sqrt[3]{y}-3-\sqrt{3}=0 \end{cases}$

Giải

Bài này chả có gì đặc biệt nếu nghiệm của nó không lẻ toác.
Từ PT(1) ta rút ra ngay $\sqrt[3]{y}=x+1$ do hàm $f(t)=t^3+t$ đơn điệu tăng. Thay vào (2) ta thu được phương trình sau :

$$x^3-\sqrt{3}x^2+3x-\sqrt{3}=0$$

Thử bằng Casio ta sẽ thấy phương trình này có 1 nghiệm rất xấu. Vậy phải làm như thế nào bây giờ. Trên thực thế ta có thể giải phương trình này bằng công thức Cardano. Tuy nhiên đây là công thức khá khó nhớ và cũng không phù hợp cho lắm. Vậy còn công cụ nào khác không ? Vẫn còn, đó là đặt ẩn bằng hàm lượng giác Hypebolic. Yếu điểm của nó đó là chỉ giải được những phương trình bậc 3 có nghiệm duy nhất. Ta sẽ đặt $x=k\left(a\pm\dfrac{1}{a}\right)$ rồi sau đó thay lại để ra phương trình trùng phương. Giờ thử áp dụng với bài này.
Trước hết hãy đưa nó về dạng khuyết thiếu bậc 2 bằng cách đổi biến $z=x+\dfrac{b}{3a}=x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow x=z+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Thay vào phương trình ta thu được

$$z^3+2z-\frac{2}{3\sqrt{3}}=0$$

Để ý giữa bậc 3 và bậc 1 là dấu cộng nên ta sẽ đặt $z=k\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$. Thay vào phương trình ta được

$$k^3a^3-3k^3a+\frac{3k^3}{a}-\frac{k^3}{a^3}+2k\left(a-\frac{1}{a}\right)=0$$

Giờ ta tìm k sao cho đưa được về dạng trùng phương. Tức là phải làm mất phần a và $\dfrac{1}{a}$. Vậy suy ra $3k^3=2k\Rightarrow k=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
Vậy đặt $z=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$ thay vào phương trình ta được

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+2\sqrt{\frac{2}{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right)-\frac{2}{3\sqrt{3}}=0\Leftrightarrow\sqrt{2}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)=1\left[\begin{array}{l} a^3=\sqrt{2} \\ a^3=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a=\sqrt[6]{2} \\ a=-\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}} \end{array}\right.\Rightarrow z=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[6]{2}-\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)=\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\Rightarrow x=\frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}};\left(\dfrac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+\sqrt{3}}{3}\right)^3\right)$ □

Phương pháp đặt này có thể giải được một số phương trình bậc 5 đặc biệt. Tôi sẽ nêu một ví dụ cho bạn đọc.

Giải phương trình : $x^5+10x^3+20x-18=0$

Nghiệm : $x=\sqrt{2}\left(\sqrt[5]{\dfrac{9+\sqrt{113}}{4\sqrt{2}}}-\sqrt[5]{\dfrac{4\sqrt{2}}{9+\sqrt{113}}}\right)$ □

Câu 216 $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x^2+y+3}\\ 2\sqrt{x+4}+3\sqrt{y+8}=13\end{cases}$

Giải

Để ý nhanh là hệ này có nghiệm $(x;y)=(0;1)$. Nếu như thế thì $\dfrac{\sqrt{x+4}}{2}=\dfrac{\sqrt{y+8}}{3}$. Rõ ràng có một chút tư tưởng đánh giá ở đây là dùng *Cauchy – Schwarz*
Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* cho phương trình (2) ta được

$$2\sqrt{x+4}+3\sqrt{y+8}\le\sqrt{(2^2+3^2)(x+y+12)}\Leftrightarrow 13\le\sqrt{13(x+y+8)}\Leftrightarrow x+y\ge 1$$

Đến đây chưa thể ra được gì. Ta hi vong từ (1) sẽ cho ta ràng buộc trái ngược đó là $x+y\le 1$.
Bình phương (1) ta có

$$x+x^2+y+3+2\sqrt{x(x^2+y+3)}=4\Rightarrow x+y=1-x^2-2\sqrt{x(x^2+y+3}\le 1$$

Vậy là có thành quả. Giờ chỉ việc cho các đẳng thức xảy ra.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(0;1)$□

Câu 217 $\begin{cases}x^{11}+xy^{10}=y^{22}+y^{12}\\ 7y^4+13x+8=2y^4.\sqrt[3]{x(3x^2+3y^2-1)}\end{cases}$

Giải

Có vẻ bài này hướng đi rất rõ ràng khi mà phương trình đầu cho dạng khá quen thuộc. Tuy nhiên nhìn vào sự khủng khiếp của phương trình (2) ta sẽ thấy hệ này hay ở đó.
Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm. Chia cả 2 vế của phương trình (1) cho y^{11} ta được

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{11}+\left(\frac{x}{y}\right)=y^{11}+y$$

Hai vế đều có dạng $f(t)=t^11+t$ và hàm này đơn điệu tăng. Từ đó suy ra $x=y^2>0$ thay vào (2) ta được

$$7x^2+13x+8=2x^2\sqrt[3]{x(3x^2+3x-1)}$$

Đây là một phương trình vô tỷ không tầm thường một chút nào.
Chia cả 2 vế cho $x^3>0$ và đặt $t=\dfrac{1}{x}>0$ ta sẽ đưa nó về phương trình

$$8t^3+13t^2+7t=2\sqrt[3]{3+3t-t^2}$$

Đây là dạng phương trình vô tỷ khá quen thuộc mà cách tối ưu vẫn là sử dụng tính đơn điệu của hàm số. Một chút khéo léo ta đưa về

$$8t^3 + 12t^2 + 10t + 3 = 3 + 3t - t^2 + 2\sqrt[3]{3 + 3t - t^2}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^3 + 2(2x+1) = 3 + 3t - t^2 + 2\sqrt[3]{3 + 3t - t^2}$$

Hai vế đều có dạng $f(t) = t^3 + 2t$ và hàm này đơn điệu tăng. Từ đó ta có

$$2t + 1 = \sqrt[3]{3 + 3t - t^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1(L) \\ t = \dfrac{-5 - \sqrt{89}}{6}(L) \\ t = \dfrac{\sqrt{89} - 5}{6}(TM) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{89} - 5} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{6}{\sqrt{89} - 5}}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\dfrac{6}{\sqrt{89} - 5}; \pm\sqrt{\dfrac{6}{\sqrt{89} - 5}}\right)$ $\square$

Câu 218 $\begin{cases} (1 + x^2)^2\left(1 + \dfrac{1}{y^4}\right) = 8 \\ (1 + y^2)^2\left(1 + \dfrac{1}{x^4}\right) = 8 \end{cases}$

Giải

Một hệ đối xứng. Có lẽ khi gặp bài này ta thường có những hướng sau : Cho 2 phương trình bằng nhau, hoặc là tiến hành chia 2 phương trình cho nhau. Tuy nhiên, với bài này, một chút tinh quái ta sẽ có một lời giải ngắn gọn và đẹp đẽ.
Điều kiện : $x, y \neq 0$
Nhân 2 phương trình với nhau ta được

$$(1 + x^2)^2 (1 + y^2)^2 \left(1 + \frac{1}{y^4}\right)\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) = 64$$

Đến đây ta sử dụng một hệ quả của Bất đẳng thức *Holder* như sau:
Với dãy số dương $a_1, a_2, \dots a_n$ ta có bất đẳng thức

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_n) \geq (1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})^n$$

Áp dụng vào bài toán trên với vế trái ta có

$$(1 + x^2)(1 + x^2)\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)(1 + y^2)(1 + y^2)\left(1 + \frac{1}{y^4}\right) \geq \left(1 + \sqrt[6]{x^2.x^2.\frac{1}{x^4}.y^2.y^2.\frac{1}{y^4}}\right)^6 = 64$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \pm 1, y = \pm 1$
Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 1), (1; -1), (-1; 1), (-1; -1)$ $\square$

Câu 219 $\begin{cases} 3x^6+7x^4y^2-7x^2y^4-3y^6=\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{2x} \\ \left(x^2-y^2\right)^7+7=0 \end{cases}$

Giải

Đây là bài toán tôi sáng tác hoàn toàn dựa vào ý tưởng của câu 160 và 161. Nếu 2 câu trên ở phương trình (2) lần lượt là mũ 3 và 5 thì câu này tôi đã nâng nó thành mũ 7. Đây là một bài hệ thuộc loại cực mạnh và đầy tính đánh đố.
Điều kiện : $x,y\neq 0$. Phương trình đầu tương đương

$$3(x^6-y^6)+7x^2y^2(x^2-y^2)=\frac{4x-3y}{2xy}$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2)(3x^4+3x^2y^2+3y^4)+7x^2y^2(x^2-y^2)=\frac{4x-3y}{2xy}$$

$$\Leftrightarrow 2xy(x^2-y^2)(3x^2+10x^2y^2+3y^4)=4x-3y$$

$$\Leftrightarrow 2xy(x^2-y^2)(3x^2+y^2)(3y^2+x^2)=4x-3y$$

Đặt $x+y=a, x-y=b \Rightarrow x=\dfrac{a+b}{2}, y=\dfrac{a-b}{2}$ thì $(ab)^7=-7$. Khi đó sẽ có

$$2xy=\frac{a^2-b^2}{2}\quad,\quad x^2+3y^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+3\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=a^2-ab+b^2$$

$$3x^2+y^2=3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=a^2+ab+b^2\quad,\quad 4x-3y=\frac{x+y}{2}+7.\frac{x-y}{2}=\frac{a+7b}{2}$$

Thay vào phương trình (1) ta có

$$\frac{a^2-b^2}{2}.ab.(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=\frac{a+7b}{2}\Leftrightarrow ab(a^2-b^2)\left[\left(a^2+b^2\right)^2-a^2b^2\right]=a+7b$$

$$\Leftrightarrow ab(a^6-b^6)=a+7b\Leftrightarrow ab(a^6-b^6)=a-(ab)^7.b$$

$$\Leftrightarrow a^7b-ab^7=a-a^7b^8\Leftrightarrow a(b^7+1)(a^6b-1)=0$$

TH1 : $a=0$ hiển nhiên vô lý

TH2 : $b=-1\Rightarrow a=\sqrt[7]{7}\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt[7]{7} \\ x-y=-1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt[7]{7}-1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt[7]{7}+1}{2} \end{cases}$

TH3 : $a^6b=1\Leftrightarrow (ab)a^5=1\Leftrightarrow a^5=-\dfrac{1}{\sqrt[7]{7}}\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{\sqrt[35]{7}}\Rightarrow b=\sqrt[35]{7^6}\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-\dfrac{1}{\sqrt[35]{7}} \\ x-y=\sqrt[35]{7^6} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[35]{7^7}-1}{2\sqrt[35]{7}}\quad,\quad y=-\frac{\sqrt[35]{7^7}+1}{2\sqrt[35]{7}}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt[7]{7}-1}{2};\dfrac{\sqrt[7]{7}+1}{2}\right),\left(\dfrac{\sqrt[35]{7^7}-1}{2\sqrt[35]{7}};-\dfrac{\sqrt[35]{7^7}+1}{2\sqrt[35]{7}}\right)$ $\square$

Câu 220 $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=2 \\ \dfrac{72xy}{x-y}+29.\sqrt[3]{x^2-y^2}=4 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq -1, y \geq -1, x \neq y$

Rõ ràng khó làm ăn được gì từ phương trình (2). Ta sẽ xuất phát từ phương trình (1). Bình phương 2 vế ta được

$$x+y+2\sqrt{xy+x+y+1}=2 \Rightarrow 4(xy+x+y+1)=(x+y)^2-4(x+y)+4$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2=8(x+y)$$

Đến đây ý tưởng gần như đã sáng tỏ. Chú ý khi bình phương lần 2 thì điều kiện đó là $x+y \leq 2$. Lát ta sẽ dùng điều kiện này để loại nghiệm.

Giờ ta biến đổi (2), đưa nó về ẩn tổng và hiệu. phương trình (2) tương đương

$$\frac{18\left[(x+y)^2-(x-y)^2\right]}{x-y}+29\sqrt[3]{(x-y)(x+y)}=4$$
$$\Leftrightarrow \frac{18\left[\dfrac{(x-y)^4}{64}-(x-y)^2\right]}{x-y}+\frac{29}{2}(x-y)=4$$

Đặt $x-y=t$. Phương trình chuyển về

$$9t^3-112t-108=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \Rightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} (TM) \\ t=-\dfrac{8}{3} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-\dfrac{8}{3} \\ x+y=\dfrac{8}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{8}{9} \\ y=\dfrac{16}{9} \end{cases} (TM) \\ t=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-\dfrac{4}{3} \\ x+y=\dfrac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{9} \\ y=\dfrac{7}{9} \end{cases} (TM) \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(3;-1),\left(-\dfrac{8}{9};\dfrac{16}{9}\right),\left(-\dfrac{5}{9};\dfrac{7}{9}\right)$ $\square$

Câu 221 $\begin{cases} x^2+y^2+xy+2x=7y \\ x^3+x^2y-x^2+2xy-6x+3y=0 \end{cases}$

Giải

Xét $y=0$ thì hệ có nghiệm $x=0$ hoặc $x=-2$

Với $y \neq 0$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^2+2x=y(7-x-y) \\ x^3+x^2y+2x^2+2xy-3(x^2+2x)=-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{y}+(x+y)=7 \\ \dfrac{(x^2+2x)(x+y)}{y}-3\dfrac{x^2+2x}{y}=-3 \end{cases}$$

Đặt $a = \dfrac{x^2+2x}{y}, b = x+y$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a+b=7 \\ ab-3a=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2-\sqrt{7}, b=5+\sqrt{7} \\ a=2+\sqrt{7}, b=5-\sqrt{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{y}=2-\sqrt{7} \\ x+y=5+\sqrt{7} \end{cases} (VN) \\ \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{y}=2-\sqrt{7} \\ x+y=5-\sqrt{7} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{-4-\sqrt{7}-\sqrt{5(7+4\sqrt{7})}}{2} \\ y=\dfrac{14-\sqrt{7}+\sqrt{5(7+4\sqrt{7})}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{-4-\sqrt{7}+\sqrt{5(7+4\sqrt{7})}}{2} \\ y=\dfrac{14-\sqrt{7}-\sqrt{5(7+4\sqrt{7})}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm :

$(x;y) = \left(\dfrac{-4-\sqrt{7}-\sqrt{5(7+4\sqrt{7})}}{2}; \dfrac{14-\sqrt{7}+\sqrt{5(7+4\sqrt{7})}}{2}\right)$

$\left(\dfrac{-4-\sqrt{7}+\sqrt{5(7+4\sqrt{7})}}{2}; \dfrac{14-\sqrt{7}-\sqrt{5(7+4\sqrt{7})}}{2}\right) (0;0), (-2;0)\square$

Câu 222 $\begin{cases} y^2+x+xy-6y+1=0 \\ y^3x-8y^2+x^2y+x=0 \end{cases}$

Giải

Đây là một bài toán khá thú vị. Hướng rất quen thuộc đó là đặt ẩn phụ tổng tích. Tuy nhiên cái hay của nó đó là vế phải không phải là hằng số mà là một biểu thức theo ẩn. Nhìn nhận loại hệ này khá khó, cần một chút tinh quái và may mắn.
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} y^2+x+xy+1=6y \\ y^3x+y^2+x^2y+x=9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy+1)+(y^2+x)=6y \\ (y^2+x)(xy+1)=9y^2 \end{cases}$$

Rõ ràng y^2+x và $xy+1$ là 2 nghiệm của phương trình $X^2-6yX+9y^2=0 \Leftrightarrow X=3y$. Từ đó ta có :

$$\begin{cases} y^2+x=3y \\ xy+1=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-y^2 \\ (3y-y^2)\,y+1=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(2;1)\square$

Câu 223 $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3y-1 \\ x^3+x^2y=x^2-x+1 \end{cases}$

Giải

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ. Hệ đã cho viết lại :

$$\begin{cases} x^2+1+y(x+y-1)=2y \\ (x^2+1).y(x+y-1)=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=y \\ y(x+y-1)=y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, y=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, y=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ □

Câu 224 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2y}=2(y^4-x^4) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=(x^2+3y^2)(3x^2+y^2) \end{cases}$

Giải

Dạng này giống với câu 138.
Điều kiện : $x,y\neq 0$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}=2y^4-2x^4+3x^4+3y^4+10x^2y^2 \\ \dfrac{1}{y}=3x^4+3y^4+10x^2y^2-2y^4+2x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=5y^4x+x^5+10x^3y^2 \\ 1=5x^4y+y^5+10x^2y^3 \end{cases}$$

Lần lượt cộng trừ hai phương trình trên cho nhau ta có

$$\begin{cases} (x+y)^5=3 \\ (x-y)^5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt[5]{3} \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt[5]{3}+1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt[5]{3}-1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt[5]{3}+1}{2};\dfrac{\sqrt[5]{3}-1}{2}\right)$ □

Câu 225 $\begin{cases} x^2+2xy+y=0 \\ x^3+3xy+2\sqrt{y+1}\left(x+\sqrt{x^2y+2}\right)=4 \end{cases}$

Giải

Đây là một bài hệ khá khó và đánh đố.
Điều kiện : $y\geq -1, x^2y\geq -2$

Từ phương trình (1) ta có $x^2+y=-2xy$. Giờ hãy khéo léo sử dụng nó.
Phương trình (2) tương đương

$$\begin{aligned}
&x^3+xy+2xy+2x\sqrt{y+1}+2\sqrt{y+1}\sqrt{x^2y+2}-4=0\\
\Leftrightarrow\ &x(x^2+y)-(x^2+y)+2x\sqrt{y+1}+2\sqrt{y+1}\sqrt{x^2y+2}-4=0\\
\Leftrightarrow\ &x.(-2xy)-x^2-y+2x\sqrt{y+1}+2\sqrt{y+1}\sqrt{x^2y+2}-4=0\\
\Leftrightarrow\ &-(x^2y+2+y+1-2\sqrt{y+1}\sqrt{x^2y+2})-\left[x^2(y+1)-2x\sqrt{y+1}+1\right]=0\\
\Leftrightarrow\ &-\left(\sqrt{x^2y+2}-\sqrt{y+1}\right)^2-\left(x\sqrt{y+1}-1\right)^2=0
\end{aligned}$$

Để đẳng thức xảy ra thì

$$\begin{cases} x\sqrt{y+1}=1\\ x^2y+2=y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2(y+1)=1\\ x^2y=y-1\\ x>0\end{cases}\Rightarrow x^2(y+1)(y-1)=x^2y$$

TH1 : $x=0\Rightarrow y=0$ (Vô lý)

TH2 : $y^2-y-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{y+1}}=\dfrac{\sqrt5-1}{2}\\ y=\dfrac{1-\sqrt5}{2}\Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{y+1}}=\dfrac{\sqrt5+1}{2}\end{array}\right.$

Ta phải thay lại vào phương trình (1) và chỉ có cặp số 2 là thỏa.

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt5+1}{2};\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)$ $\square$

Câu 226 $\begin{cases} x^3+3xy^2=x^2+y^2+2\\ x^4+y^4+6x^2y^2=8\end{cases}$

Giải

Phương trình (1) tương đương $x(x^2+3y^2)=x^2+y^2+2\Rightarrow$ để có nghiệm thì $x>0$ Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2+(2xy)^2=8\\ x^2+y^2+2=x(x^2+y^2)+(2xy).y\end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
(x^2+y^2+2)^2&=\left[x(x^2+y^2)+y(2xy)\right]\le(x^2+y^2)\left((x^2+y^2)^2+(2xy)^2\right)\\
&\Leftrightarrow(x^2+y^2+2)^2\le 8(x^2+y^2)\Leftrightarrow(x^2+y^2-2)^2\le 0
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} x^2+y^2=2\\ \dfrac{x^2+y^2}{x}=\dfrac{2xy}{y}\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{2}{x}=2x\Leftrightarrow x=1,y=\pm1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1),(1;-1)$ $\square$

Câu 227 $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{2y} = \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{y^2+3}} \\ x+\sqrt{y+1} = 3 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $-1 \leq y \neq 0$
Nhìn vào phương trình (1) ta thấy để có nghiệm thì $2x+1$ và $2y$ cùng dấu.
Phương trình (1) tương đương

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x+1} + \frac{\sqrt{y^2+3}}{2y} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+x+1}{4x^2+4x+1}} + \sqrt{\frac{y^2+3}{4y^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+x+\frac{1}{4}}{4\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4y^2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4(2x+1)^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4y^2}}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow y = 2x+1$$

Thay vào phương trình (2) ta được

$$x+\sqrt{2x+2} = 3 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (1;3)\square$

Câu 228 $\begin{cases} x+3y^2-2y = 0 \\ 36\left(x\sqrt{x}+3y^3\right) - 27(4y^2-y) + \left(2\sqrt{3}-9\right)\sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases}$

Giải

Đây là một câu trong đề Olympic 30/4 năm 2013. Tất nhiên là một câu rất khó nếu không tinh ý nhận ra.
Điều kiện :$x \leq 0$
Phương trình (1) tương đương : $3x+(3y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x}\right)^2 + (3y-1)^2 = 1$
Vậy ta đặt $3y-1 = \cos t, \sqrt{3x} = \sin t, t \in [0;\pi]$
Thay hết vào phương trình (2) ta được

$$36x\sqrt{x} + (2\sqrt{3}-9)\sqrt{x} + 4(3y-1)^3 - 3(3y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{36\sin^3 t}{3\sqrt{3}} + (2\sqrt{3}-9)\frac{\sin t}{\sqrt{3}} + 4\cos^3 t - 3\cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}\sin^3 t - 3\sqrt{3}\sin t + \cos 3t = -2\sin t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 3t - \cos 3t = 2\sin t \Leftrightarrow \sin\left(3t - \frac{\pi}{6}\right) = \sin t$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ t = \dfrac{7\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. \\ t \in [0;\pi] \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{24};\frac{19\pi}{24}\right\}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\dfrac{\sin^2 t}{3};\dfrac{1+\cos t}{3}\right)$ với $t \in \left\{\dfrac{\pi}{12};\dfrac{7\pi}{24};\dfrac{19\pi}{24}\right\}$ $\square$

Câu 229 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ 16x^5 - 20x^3 + 5x + 512y^5 - 160y^3 + 10y + \sqrt{2} = 0 \end{cases}$

Giải

Để ý một phần của phương trình (2) biểu thức rất giống công thức nhân 5. Và biểu thức đầu càng khiến ta có cơ sở lượng giác hóa cho bài này.
Đặt $x = \sin t, 2y = \cos t, t \in [0;2\pi]$. Thay tất cả vào (2) ta được

$$16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t + (16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t) + \sqrt{2} = 0$$

$$\sin 5t + \cos 5t = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(5t + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{3\pi}{20} + \dfrac{k2\pi}{5} \\ t \in [0;2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{4};\frac{13\pi}{20};\frac{21\pi}{20};\frac{29\pi}{20};\frac{37\pi}{20}\right\}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)\left(\sin t;\dfrac{\cos t}{2}\right)$ với $t \in \left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{13\pi}{20};\dfrac{21\pi}{20};\dfrac{29\pi}{20};\dfrac{37\pi}{20}\right\}$ $\square$

Câu 230 $\begin{cases} 2(x+y)^3 + 4xy - 3 = 0 \\ (x+y)^4 - 2x^2 - 4xy + 2y^2 + x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2(x+y)^3 + 4xy - 3 = 0 \\ (x+y)^4 - 2(x+y)^2 + (x+y) + (2y-1)^2 = 0 \end{cases}$$

Đặt $x + y = t$ ta có

$$0 = 2t^3 + 4xy - 3 \leq 2t^2 + t - 3 \Leftrightarrow t \geq 1$$

Phương trình (2) tương đương

$$t^4 - 2t^2 + t + (2y-1)^2 = 0$$

Ta có : $t^4 - 2t^2 + t = t(t-1)(t^2+t-1) \geq 0$ với $\forall t \geq 1$ và $(2y-1)^2 \geq 0$
Vậy vế trái của phương trình (2) luôn không âm.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 2y-1=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ □

Câu 231 $\begin{cases} (2x-y+2)(2x+y)+6x-3y=-6 \\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{y-1}=4 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \ge -\dfrac{1}{2}, y \ge 1$

Đặt $a=\sqrt{2x+1}\ge 0, b=\sqrt{y-1}\ge 0$ ta có hệ

$$\begin{cases} a+b=4 \\ \left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)+3\left(a^2-b^2-2\right)=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ \left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2+3\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a=b=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=5 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};5\right)$ □

Câu 232 $\begin{cases} \sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+\sqrt{xy}=3y \\ 4\sqrt{(x+2)(y+2x)}=3(x+3) \end{cases}$

Giải

Đây là một loại hệ khá thú vị. Bạn sẽ còn gặp khoảng 2,3 câu như này nữa trong cuốn sách.
Đặt điều kiện cho hệ phương trình.
Dễ thấy 2 điều kiện nổi bật nhất để hệ có nghiệm là $x,y\ge 0$
Phương trình (1) tương đương

$$\left(\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}-2y\right)+\left(\sqrt{xy}-y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+(4x-9)(x-y)-4y^2}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\frac{xy-y^2}{\sqrt{xy}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{8x+4y-9}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\frac{y}{\sqrt{xy}+y}\right)=0$$

Đến đây bạn mong đợi nhất điều gì ? Bây giờ chỉ ước sao $8x+4y\ge 9$ nữa thôi là xong trận rồi nhỉ ? Vậy chứng minh kiểu gì ? Lấy ở đâu ra ? Ở phương trình (2) chứ đâu nữa ! Để ý một tẹo là sẽ làm xuất hiện $8x + 4y$. Từ phương trình (2) ta rút ra $8x + 4y = \dfrac{9(x+3)^2}{4(x+2)}$. Giờ công việc của ta là phải chứng minh

$$\frac{9(x+3)^2}{4(x+2)} \geq 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$$

Như vậy ta đã có thành quả. Từ đó rút ra $x = y$ thay vào phương trình (2) ta có

$$4\sqrt{3x(x+2)} = 3(x+3) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{27}{13}(L) \\ x = 1 \Rightarrow y = 1(TM) \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1)\square$

Tiếp sau đây chúng ta đến với một chùm hệ sử dụng phương pháp nhân 2 phương trình với nhau để đổi ẩn. Tức là ta sẽ khéo léo sắp xếp lại hệ một chút rồi nhân 2 phương trình với nhau tạo thành một phương trình ẩn mới (thường là ẩn xy). Đây là một hướng làm khó, nó yêu cầu sự tinh tế và tinh quái trong việc nhìn bao quát hệ và sắp xếp các phương trình.

Câu 233 $\begin{cases} y(xy-2) = 3x^2 \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} y(xy-2) = 3x^2 \\ x(xy+2) = -y^2 \end{cases} \Rightarrow -3x^2y^2 = xy(xy-2)(xy+2)$$

TH1 : $x = y = 0$

TH2 : $-3xy = (xy)^2 - 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 1 \\ xy = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{y} \\ x = -\dfrac{4}{y} \end{array}\right.$

Với $x = \dfrac{1}{y}$ thay (2) ta được $y^2 + \dfrac{3}{y} = 0 \Leftrightarrow y = -\sqrt[3]{3} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Với $x = -\dfrac{4}{y}$ tương tự và ta tìm ra $y = -2 \Rightarrow x = 2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (0; 0), (2; -2), \left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}; -\sqrt[3]{3}\right)\square$

Loại hệ này hình thức cho thường khá giản đơn như vậy. Một lời khuyên nhỏ của tôi là hãy đưa những phần tử đơn độc như x, x^2, x^3, y, y^2... sang một vế, những phần tử kết dính với nhau như $xy, x^2y, y^2x, \ldots$ sang một vế. Tất nhiên nó sẽ có nhiều yếu tố khác, cần phải động não để tìm hướng giải quyết. Giờ tiếp tục đến một số câu cùng ý tưởng.

Câu 234 $\begin{cases} x^3 + xy - 2 = 0 \\ y^3 + 3xy + 3 = 0 \end{cases}$

Giải

Đây là một câu trong đề thi thử của trường THPT Chuyên - ĐHSPHN. Ý tưởng của nó cũng như trên.
Hệ viết lại như sau

$$\begin{cases} x^3 = 2 - xy \\ y^3 = -3xy - 3 \end{cases} \Rightarrow (xy)^3 = (2 - xy). - 3(xy + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy)^3 - 3(xy)^2 + 3xy - 1 = 7 \Leftrightarrow (xy - 1)^3 = -7 \Leftrightarrow xy = 1 - \sqrt[3]{7}$$

Tất nhiên đến đây chả ai điên mà rút x theo y và thay vào phương trình (2). Từ 2 phương trình đầu ta hoàn toàn có thể tính được x, y rồi. Từ (1) ta có

$$x^3 = 2 - xy = 1 + \sqrt[3]{7} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{7}}$$

Từ (2) ta có

$$y^3 = -3xy - 3 = 3\sqrt[3]{7} - 6 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{7} - 6}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{7}}; \sqrt[3]{3\sqrt[3]{7} - 6}\right)$ $\square$

Câu 235 $\begin{cases} 5x^3 + 3y^3 - 2xy = 6 \\ 3x^3 + 2y^3 + 3xy = 8 \end{cases}$

Giải

Đây là một hệ rất hay là phát triển hơn của câu 234. Ở đây là không thể áp dụng nhân tạo ẩn mới ngay được. Muốn được thì phải đưa nó về dạng giống như trên, tức là mỗi phương trình không tồn tại cả 2 phần tử x^3 và y^3. Làm cách nào ? Rất đơn giản đó là coi x^3, y^3 là ẩn chính còn xy là hằng số. Như thế ta được một hệ của lớp 9, rất đơn giản ta rút được x^3, y^3 theo xy. Ở đây sẽ là

$$\begin{cases} 5x^3 + 3y^3 = 6 + 2xy \\ 3x^3 + 2y^3 = 8 - 3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 13xy - 12 & (3) \\ y^3 = -21xy + 22 & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3y^3 = (13xy - 12)(-21xy + 22) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 1 \\ xy = -137 \pm \sqrt{19033} \end{array} \right.$$

Với $xy = 1$ từ (3) và (4) dễ dằng giải ra $x = y = 1$

Với $xy = -137 + \sqrt{19033}$ từ (3)(4) suy ra $x = \sqrt[3]{13(-137 + \sqrt{19033}) - 12} = \sqrt[3]{13\sqrt{19033} - 1793}$ và $y = \sqrt[3]{-21(-137 + \sqrt{19033}) + 22} = \sqrt[3]{2899 - 21\sqrt{19033}}$

Với $xy = -137 - \sqrt{19033}$ từ (3)(4) suy ra $x = \sqrt[3]{-13\sqrt{19033} - 1793}$, $y = \sqrt[3]{2899 + 21\sqrt{19033}}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1), \left(\sqrt[3]{13\sqrt{19033} - 1793}; \sqrt[3]{2899 - 21\sqrt{19033}}\right)$
$\left(\sqrt[3]{-13\sqrt{19033} - 1793}; \sqrt[3]{2899 + 21\sqrt{19033}}\right)$ □

Câu 236 $\begin{cases} x^3 - 8y^3 = 1 + 3xy - 3x^2y^2 \\ 8y^3 - 3x^3 = 1 - 3xy + 9x^2y^2 \end{cases}$

Giải

Tác giả bài toán là thầy Lê Trung Tín bên BoxMath. Nhìn thì có vẻ khá giống câu trên nhưng thực ra bài này ở level cao hơn rất nhiều. Trước hết ta hãy cứ làm quen thuộc đã
Hệ tương đương

$$\begin{cases} -x^3 = 3x^2y^2 + 1 & (1) \\ -8y^3 = 3xy + 2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) nhân (2) vế theo vế, ta được

$$x^3y^3 + 6x^2y^2 + 3xy + 2 = 0 \quad (3)$$

Đây là một phương trình bậc 3 ẩn xy tuy nhiên nghiệm khá xấu. Hãy thử kết hợp với các phương trình khác xem.
Lấy (3) trừ (1) vế theo vế, ta được

$$(xy + 1)^3 = x^3 \Leftrightarrow xy = x - 1 \quad (4)$$

Thế (4) vào (1), ta được

$$\begin{aligned} & x^3 + 3(x-1)^2 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3x^3 = (x-2)^3 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt[3]{3}x = x - 2 \\ \Leftrightarrow\ & x = -1 - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} \end{aligned}$$

Thay lại vào (4) và ta tìm ra $y = \dfrac{1 + \sqrt[3]{3}}{2}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(-1 - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}; \dfrac{1 + \sqrt[3]{3}}{2}\right)$ □

Câu 237 $\begin{cases} (x - y)^4 = 13x - 4 \\ \sqrt{x + y} + \sqrt{3x - y} = \sqrt{2} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \le min\{-x; 3x\}$
Phương trình (2) tương đương

$$\begin{aligned} & x + y + 3x - y + 2\sqrt{(x+y)(3x-y)} = 2 \\ \Leftrightarrow & 1 - 2x = 2\sqrt{(x+y)(3x-y)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ (2x-1)^2 = 3x^2 + 2xy - y^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & (x-y)^2 = 4x - 1 \end{aligned}$$

Thay vào (1) ta được

$$(4x-1)^2 = 13x - 4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{16} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\frac{3}{16} \\ y = \frac{13}{16} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\frac{5}{16}; -\frac{3}{16}\right), \left(\frac{5}{16}; \frac{13}{16}\right) \square$

Câu 238 $\begin{cases} x^2y^2 - 9x + 4y^2 = 0 \\ x^3 + 3x^2 - 24x + 2y + 31 = 0 \end{cases}$

Giải

Phương trình (1) tương đương

$$y^2 = \frac{9x}{x^2+4} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y^2 \leq \frac{9x}{4x} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Sử dụng kết quả này kết hợp với phương trình (2) ta được

$$x^3 + 3x^2 - 24x + 31 = -2y \leq 3 \Leftrightarrow (x-2)^2(x+7) \leq 0 \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = 2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(2; -\frac{3}{2}\right) \square$

Tôi đưa thêm 1 ví dụ nữa cho các bạn làm. Và tự rút ra nhận xét về hình thức của chúng.

Câu 239 $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^3 + 3x^2 + 6y - 12x + 13 = 0 \end{cases}$

Nghiệm : $(x;y) = (1;-1) \square$

Câu 240 $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - x + 1 = y^2 - 2xy - x^2 \\ y^3 - 3yx^2 + y - 1 = y^2 + 2xy - x^2 \end{cases}$

Giải

Hệ khá đối xứng. Tuy nhiên đây mà một bài toán khá khó chơi.
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x(x^2-y^2) - 2xy^2 + (x^2-y^2) + 2xy - x + 1 = 0 \\ y(y^2-x^2) - 2x^2y + (x^2-y^2) - 2xy + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Lấy $PT(1) - i.PT(2)$ ta được

$$(x^2-y^2)(x+yi) - 2xy(xi-y) + (x^2-y^2)(1-i) + 2xy(1+i) - (x+yi) + 1 + i = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+yi)(x^2-y^2) + 2xyi(x+yi) + (x^2-y^2)(1-i) - 2xyi(i-1) - (x+yi) + 1 - i = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+yi)(x^2+2xyi-y^2) + (1-i)(x^2+2xyi-y^2) - (x+yi) + 1 + i = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+yi)^3 + (1-i)(x+yi)^2 - (x+yi) + 1 + i = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 + (1-i)z - z + 1 + i = 0 \qquad (z = x+yi)$$

$$\Leftrightarrow (z-i)(z^2+z-1+i) = 0$$

TH1 : $z = i \Leftrightarrow (x;y) = (0;1)$
TH2 : $z^2 + z - 1 + i = 0$

$$\Delta = 5 - 4i = (a+bi)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(5+\sqrt{41})} \\ b = \mp\dfrac{1}{4}(\sqrt{41}-5)\sqrt{\dfrac{1}{2}(5+\sqrt{41})} \end{cases}$$

Đến đây ta tìm được $z = \dfrac{-2-\sqrt{2(5+\sqrt{41})}}{4} + i.\dfrac{1}{8}(\sqrt{41}-5)\sqrt{\dfrac{1}{2}(5+\sqrt{41})}$ hoặc
$z = \dfrac{-2+\sqrt{2(5+\sqrt{41})}}{4} - i.\dfrac{1}{8}(\sqrt{41}-5)\sqrt{\dfrac{1}{2}(5+\sqrt{41})}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (0;1)$, $\left(\dfrac{-2-\sqrt{2(5+\sqrt{41})}}{4}; \dfrac{1}{8}(\sqrt{41}-5)\sqrt{\dfrac{1}{2}(5+\sqrt{41})}\right)$,
$\left(\dfrac{-2+\sqrt{2(5+\sqrt{41})}}{4}; -\dfrac{1}{8}(\sqrt{41}-5)\sqrt{\dfrac{1}{2}(5+\sqrt{41})}\right)$ □

2.9 Câu 241 đến câu 270

Câu 241 $\begin{cases} \dfrac{x}{y+1} + \dfrac{y}{x+1} = \dfrac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1} \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{3}{\sqrt{y-1}} = 4 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x, y > 1$
Chính vì điều kiện này mà ta có bất đẳng thức khá quen thuộc sau

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}+1}$$

Phương trình (1) tương đương

$$\frac{x}{y+1}+1+\frac{y}{x+1}+1=\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1}+2$$
$$\Leftrightarrow (x+y+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)=\frac{2(2\sqrt{xy}+1)}{\sqrt{xy}+1} \quad (*)$$

Mà ta có $\begin{cases} x+y+1\geq 2\sqrt{xy}+1 \\ \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}\geq \dfrac{2}{\sqrt{xy}+1}\end{cases}$ Vậy (*) suy ra $VT \geq VP$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y$ thay vào (2) ta được

$$\frac{8}{\sqrt{x-1}}=4\Leftrightarrow x=y=5$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(5;5)\square$

Câu 242 $\begin{cases} x^2+2x-2=\sqrt{-y^2-4y-2} \\ 6x-y-11+\sqrt{10-4x-2x^2}=0\end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y^2+4y+2\leq 0, 10-4x-2x^2\geq 0$

Một hệ khá khó chịu. Không làm ăn gì nổi từ 2 phương trình. Đánh giá có lẽ là giải pháp cuối.Ở đây có căn nên có lẽ sẽ dùng $AM-GM$. Ta lại mò ra được nghiệm $(x;y)=(1;-3)$. Đấy là cơ sở để ta nhân chia hằng số phù hợp. Ta có

$$(1)\Leftrightarrow x^2+2x-2=\sqrt{1(-y^2-4y-2)}\leq \frac{-y^2-4y-1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+4x+y^2+4y-3\leq 0 \quad (*)$$

Tương tự với (2) ta có

$$(2)\Leftrightarrow y-6x+11=\sqrt{10-4x-2x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4(10-4x-2x^2)}$$
$$\leq \frac{14-4x-2x^2}{4}\Leftrightarrow x^2-10x+2y+2y+15\leq 0 \quad (**)$$

Cộng (*) với (**) ta có

$$3x^2-6x+y^2+6y+12\leq 0\Leftrightarrow 3(x-1)^2+(y+3)^2\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3\end{cases}$$

Thay lại vào hệ thấy thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;-3)\square$

Câu 243 $\begin{cases} y^3 + x^2 = \sqrt{64 - x^2 y} \\ \left(x^2 + 3\right)^3 = y + 6 \end{cases}$

Giải

Ta có

$$y + 6 = \left(x^2 + 2\right)^3 \geq 2^3 = 8 \Leftrightarrow y \geq 2$$

Xét (1) ta có

$$y^3 + x^2 \geq 8 \geq \sqrt{64 - x^2 y}$$

Đẳng thức xảy ra khi $y = 2, x = 0$ thử lại thấy thỏa mãn.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (0; 2)\square$

Câu 244 $\begin{cases} 2\sqrt{x - 4} - \sqrt{y - 1} = 2 \\ x + \sqrt{12x + y^2} = 19 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq 4, y \geq 1$
Phương trình (1) tương đương

$$2\sqrt{x - 4} - 4 = \sqrt{y - 1} - 2 \Leftrightarrow \frac{2(x - 8)}{2\sqrt{x - 4} + 4} = \frac{y - 5}{\sqrt{y - 1} + 2}$$

· Xét $x > 8 \Rightarrow y > 5$. Khi đó $VT = x + \sqrt{12x + y^2} > 8 + \sqrt{121} = 19 = VP$
· Xét $x < 8 \Rightarrow y < 5$. Khi đó $VT < VP$
Vậy $x = 8, y = 5$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (8; 5)\square$

Câu 245 $\begin{cases} \sqrt{x + 2} - \sqrt{y} = 1 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{4x + y^2}} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq -2, y \geq 0$
Vì $y = 0$ không là nghiệm $\Rightarrow y > 0$. Vậy ta suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{x + 2} > 1 \\ \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{\sqrt{4x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3(7 - \sqrt{33})}{2} \\ y > 0 \end{cases}$$

Giả sử $y < x - 1$ thì

(1) ta được $\begin{cases} x > \dfrac{3(7 - \sqrt{33})}{2} \\ \sqrt{x + 2} < 1 + \sqrt{x - 1} \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

(2) ta được $\begin{cases} x > \dfrac{3(7-\sqrt{33})}{2} \\ \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{3(7-\sqrt{33})}{2} < x < 2$

Rõ ràng là vô lý. Tương tự với $y > x-1$

Vậy $y = x-1$ thay vào (2) ta có

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{6} + \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1 \quad (TM)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (2;1)\square$

Câu 246 $\begin{cases} \sqrt{x-5} + \sqrt{2y-4} = x - y + 1 \\ 8\sqrt{y(x-2)} + 4 - 8y = (y-x)^2 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq 5, y \geq 2$

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow 8\sqrt{yx-2y} + 4 - 8y = x^2 - 2xy + y^2 \\
&\Leftrightarrow 4(xy-2y) + 8\sqrt{xy-2y} + 4 = x^2 + 2xy + y^2 \\
&\Leftrightarrow \left[2\sqrt{xy-2y} + 2\right]^2 = (x+y)^2 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{xy-2y} + 2 = x + y \quad (3) \\ 2\sqrt{xy-2y} + 2 = -(x+y) \quad (4) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

(4) loại vì $VT > 0 > VP$

(3) $\Leftrightarrow 2\sqrt{y(x-2)} = (x-2) + y \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{y}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y + 2$

Thay lên (1) ta có

$$\sqrt{y-3} + \sqrt{2y-4} = 3 \Leftrightarrow y = 4 \Rightarrow x = 6 \quad (TM)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (6;4)\square$

Câu 247 $\begin{cases} y + \sqrt{3y^2 - 2y + 6 + 3x^2} = 3x + \sqrt{7x^2 + 7} + 2 \\ 3y^2 - 4x^2 - 3y + 3x + 1 = 0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $3y^2 - 2y + 6 + 3x^2 \geq 0$

Thấy hệ này chứa một tam thức bậc 2. Vậy thử tính Δ xem sao. Không được rồi ! Quá xấu. Nghĩ hướng khác. Nhận thấy phương trình (1) chứa một căn thức khá bất ổn. Có lẽ nó liên quan đến phương trình thứ (2). Thử dùng phép thế xem sao.

Từ (2) ta rút ra

$$3y^2 - 2y + 6 + 3x^2 = 7x^2 + y - 3x + 5$$

Thay lên (1) ta được

$$y-3x-2+\sqrt{7x^2+y-3x+5}=\sqrt{7x^2+7}$$

Đến đây liệu đi tiếp được chứ ? Đặt $\sqrt{7x^2+7}=u>0, y-3x-2=v$ ta có phương trình

$$v+\sqrt{u^2+v}=u \Leftrightarrow \sqrt{u^2+v}=u-v$$

$$\Rightarrow u^2-2uv+v^2=u^2+v \Leftrightarrow v(2u-v+1)=0$$

Ta có : $2u-v+1=u+(u-v)+1>0$
Vậy suy ra $v=0 \Leftrightarrow y=3x+2$ thay vào (2) ta được

$$3(3x+2)^2-4x^2-3(3x+2)+3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-1 \Rightarrow y=-1 & (TM) \\ x=-\dfrac{7}{23} \Rightarrow y=\dfrac{25}{23} & (TM) \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(-1;-1),\left(-\dfrac{7}{23};\dfrac{25}{23}\right)$ $\square$

Câu 248 $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{(1-y)(1-x^2)}}+\dfrac{y}{\sqrt{(1-x)(1-y^2)}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{(1-x^2)(1-y^2)}} \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{(1-x^2)(1-y^2)}} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $-1<x<1, -1<y<1$
Phương trình (2) tương đương

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$$

Ta có :

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{(x^2+y^2)(2-x^2-y^2)} \leq \frac{x^2+y^2+2-x^2-y^2}{2}=1$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y\sqrt{1-y^2}=x\sqrt{1-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Thay vào (2) chỉ có $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\square$

Câu 249 $\begin{cases} 2\sqrt{x+y^2+y+3}-3\sqrt{y}=\sqrt{x+2} \\ y^3+y^2-3y-5=3x-\sqrt[3]{x+2} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \geq 0, x \geq -2$
Chắc chắn sẽ xuất phát từ (1). Tương đương

$$2\sqrt{x+y^2+y+3}=3\sqrt{y}+\sqrt{x+2}$$

Ta có

$$3\sqrt{y}+\sqrt{x+2}=\sqrt{3}.\sqrt{3y}+1.\sqrt{x+2}\leq 2\sqrt{3y+x+2}$$

Giờ ta chứng minh

$$2\sqrt{3y+x+2}\leq 2\sqrt{x+y^2+y+3}\Leftrightarrow (y-1)^2\geq 0 \quad (Right)$$

Đẳng thức xảy ra khi $y=1$ và $\sqrt{y}=\sqrt{x+2}\Rightarrow x=-1$
Thay vào phương trình (2) thấy thỏa mãn.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(-1;1)$□

Câu 250 $\begin{cases} x(x^2+1)+xy(2x-3y)+y(x-2)=2y^2(1+5y) \\ (x^2+17y+12)^2=4(x+y+7)(x^2+3x+8y+5) \end{cases}$

Giải

Vẫn giữ nguyên tư tưởng khi gặp loại hệ này. Hoặc nhóm nhân tử được hoặc đặt ẩn phụ. Nếu nhóm nhân tử có lẽ sẽ xuất phát từ (1) vì (2) quá đồ sộ.
Phương trình (1) tương đương

$$(x-2y)+(x^3+2x^2y-3xy^2-10y^3)+xy-2y^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)+(x-2y)(x^2+4xy+5y^2)+y(x-2y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2+4xy+5y^2+y+1)=0$$

Hiển nhiên $x^2+4xy+5y^2+y+1=(x+2y)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$. Vậy ta rút được $x=2y$ thay vào (2) ta được

$$(4y^2+17y+12)^2=4(3y+7)(4y^2+14y+5)$$

Ta có thể nhân tung nó ra rồi giải phương trình bậc 4, tuy nhiên để ý một chút thì bài toán giải quyết nhanh hơn khá nhiều.
Đặt $4y^2+14y+5=a, 3y+7=b$. Phương trình tương đương

$$(a+b)^2=4ab\Leftrightarrow (a-b)^2=0\Leftrightarrow 4y^2+11y-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-11-3\sqrt{17}}{8}\Rightarrow x=\dfrac{-11-3\sqrt{17}}{4} \\ y=\dfrac{-11+3\sqrt{17}}{8}\Rightarrow x=\dfrac{-11+3\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{-11-3\sqrt{17}}{4};\dfrac{-11-3\sqrt{17}}{8}\right),\left(\dfrac{-11+3\sqrt{17}}{4};\dfrac{-11+3\sqrt{17}}{8}\right)$□

Câu 251 $\begin{cases} y^2 - x\sqrt{\dfrac{y^2+2}{x}} = 2x-2 \\ \sqrt{y^2+1} + \sqrt[3]{2x-1} = 1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x > 0$
Phương trình (1) tương đương

$$\Leftrightarrow y^2 + 2 - x\sqrt{\frac{y^2+2}{x}} = 2x$$
$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{x} - \sqrt{\frac{y^2+2}{x}} = 2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow y^2 = 4x - 2$$

Thay vào (2) ta được
$$\sqrt{4x-1} + \sqrt[3]{2x-1} = 1$$
Ta đặt 2 căn và dựng một hệ tạm sau
$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2 - 2b^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{4x-1} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\dfrac{1}{2};0\right)$ □

Câu 252 $\begin{cases} x^2 - 4\sqrt{3x-2} + 10 = 2y \\ y^2 - 6\sqrt{4y-3} + 11 = x \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq \dfrac{2}{3}, y \geq \dfrac{3}{4}$
Cộng 2 phương trình với nhau ta được

$$x^2 - 4\sqrt{3x-2} + 10 + y^2 - 6\sqrt{4y-3} + 11 = 2y + x$$
$$\Leftrightarrow (3x - 2 - 4\sqrt{3x-2} + 4) + (x^2 - 4x + 4) + (4y - 3 - 6\sqrt{4y-3} + 9) + (y^2 - 6y + 9) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-2} - 2\right)^2 + (x-2)^2 + \left(\sqrt{4y-3} - 3\right)^2 + (y-3)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Thay lại vào hệ thấy thỏa mãn.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (2;3)$□

Câu 253 $\begin{cases} 2(x-2)\sqrt{x+6} = 6-y \\ (x-2)\sqrt{y+2} = \sqrt{y+1}\sqrt{x^2-4x+5} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq -6, y \geq -1$
Phương trình (2) tương đương

$$\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{y+2}} \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{\left(\sqrt{y+1}\right)^2+1}}$$

Xét $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$. Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}(t^2+1)} > 0$. Vậy $f(t)$ đơn điệu tăng và từ đó rút ra $x-2 = \sqrt{y+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y = x^2-4x+3 \end{cases}$. Thay lên (1) ta được

$$2(x-2)\sqrt{x+6} = -x^2+4x+3$$
$$\Leftrightarrow 2(x-2)\left(\sqrt{x+6}-3\right) = -x^2-2x+15$$
$$\Leftrightarrow 2(x-2)\frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3} = -(x-3)(x+5)$$

Rõ ràng với điều kiện khi rút thì phương trình này chỉ có nghiệm $x = 3 \Rightarrow y = 0$.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (3;0)\square$

Câu 254 $\begin{cases} x^3y^3+3xy^2-7y^3 = 1 \\ x^2+2x+(xy-1)^2 = 2x^2y \end{cases}$

Giải

Phương trình (2) tương đương

$$x^2+2x+x^2y^2-2xy+1-2x^2y = 0 \Leftrightarrow (xy-x-1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow xy-x-1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = x+1 \\ y = \dfrac{x+1}{x} \end{cases}$$

Thay hết lên (1) ta có

$$(x+1)^3+3(x+1)\frac{x+1}{x} - 7\left(\frac{x+1}{x}\right)^3 = 1$$
$$\Leftrightarrow x^3(x+1)^3+3x^2(x+1)^2-7(x+1)^3 = x^3$$
$$\Leftrightarrow x^3(x+1)^3+3x^2(x+1)^2+3x(x+1)+1 = x^3+3x(x+1)+1+7(x+1)^3$$
$$\Leftrightarrow (x^2+x+1)^3 = 8(x+1)^3 = (2x+2)^3$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ □

Câu 255 $\begin{cases} 2x^2-\dfrac{2}{y^2}-(\sqrt{2}+1)(x\sqrt{2}-1)-\dfrac{xy^2}{x^2y^2+1}=0 \\ 4x+\dfrac{y^2}{x^2y^2+1}=2+\sqrt{2} \end{cases}$

Giải

Tác giả bài toán là anh Nguyễn Bình. Đây tất nhiên là một bài toán rất khó, đòi hỏi nghệ thuật biến đổi khá tốt.
Điều kiện : $y\neq 0$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2x^2-\dfrac{2}{y^2}-\left(\sqrt{2}+1\right)x\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}.x\sqrt{2}}{2x^2+\dfrac{2}{y^2}}=-\left(\sqrt{2}+1\right) \\ 2.\dfrac{2x}{y}+\dfrac{\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{y}}{2x^2+\dfrac{2}{y^2}}-\left(\sqrt{2}+1\right)\dfrac{\sqrt{2}}{y}=0 \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{2}x=a,\ \dfrac{\sqrt{2}}{y}=b$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a^2-b^2-\left(\sqrt{2}+1\right)a-\dfrac{\sqrt{2}a}{a^2+b^2}=-(\sqrt{2}+1) \\ 2ab-(\sqrt{2}+1)b+\dfrac{\sqrt{2}b}{a^2+b^2}=0 \end{cases}$$

Lấy $PT(1)-i.PT(2)$ ta được

$$(a^2-b^2+2abi)-(\sqrt{2}+1)(a+bi)-\frac{\sqrt{2}(a-bi)}{a^2+b^2}+(\sqrt{2}+1)=0$$

Đặt $z=a+bi$. Thì phương trình đã cho tương đương

$$z^2-\left(\sqrt{2}+1\right)z-\frac{\sqrt{2}\bar{z}}{z.\bar{z}}+\sqrt{2}+1=0\Leftrightarrow z^2-\left(\sqrt{2}+1\right)z-\frac{\sqrt{2}}{z}+\left(\sqrt{2}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\left(z-\sqrt{2}\right)\left(z^2-z+1\right)}{z}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\sqrt{2} \\ z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$$

Với $z=\sqrt{2}\Rightarrow a=\sqrt{2},b=0\quad (L)$

Với $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Với $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ y=-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\square$

Câu 256 $\begin{cases} x-y=2y^2+1 \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-2y}=3y \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x+y\geq 0, 2x-y\geq 0$
Rõ ràng để có nghiệm thì $y\geq 0$
Phương trình (2) tương đương

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-2y}=\left(\sqrt{x+y}\right)^2-\left(\sqrt{x-2y}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+y}=\sqrt{x-2y}+1$$

Xử lí cái này tốt nhất ta sẽ sử dụng hệ tạm. Đặt $\sqrt{x+y}=a, \sqrt{x-2y}=b$. Ta có :

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a^2-b^2=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=3y \end{cases} \Leftrightarrow 2a=3y+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+y}=3y+1 \Leftrightarrow 4x=9y^2+2y+1$$

Thay lên (1) ta có

$$\frac{9y^2+2y+1}{4}=2y^2+y+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \Rightarrow x=22 \\ y=-1 \quad (L) \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(22;3)\square$

Câu 257 $\begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{(x+y)^4}=\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}-\dfrac{3}{8} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}}=4 \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x,y>0$.
Thoạt nhìn thấy phương trình (1) khá thuần nhất. Đặt $x=ty$ chăng. Tuy nhiên khi đó ta sẽ ra một phương trình ẩn t không dễ chơi một chút nào. Để ý : dấu bằng xảy ra tại $x=y$. Vậy phải chăng là dùng bất đẳng thức ?
Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ cho vế trái của (1) ta có

$$\frac{x^4+y^4}{(x+y)^4}\geq\frac{(x^2+y^2)^2}{2(x+y)^4}\geq\frac{(x+y)^4}{8(x+y)^4}=\frac{1}{8}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho vế phải ta có

$$\frac{\sqrt{xy}}{x+y} - \frac{3}{8} \leq \frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y$. Thay vào (2) dễ dàng giải ra $x = y = 1$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1)$□

Câu 258 $\begin{cases} \sqrt{xy - (x-y)(\sqrt{xy}-2)} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y} \\ (x+1)\left(y + \sqrt{xy} + x(1-x)\right) = 4 \end{cases}$

Giải

Đọc hướng giải và thử xem loại hệ này đã rơi vào câu nào rồi nhé !
Phương trình (1) tương đương

$$\frac{xy + (x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right) - y^2}{\sqrt{xy + (x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)} + y} + \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{y + \sqrt{xy} - 2}{\sqrt{xy + (x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)} + y} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right] = 0 \quad (*)$$

Giờ ta mong rằng $y + \sqrt{xy} \geq 2$. Thật vậy, từ (2) ta có

$$y + \sqrt{xy} = \frac{4}{x+1} + x^2 - x$$

Giờ phải chứng minh

$$\frac{4}{x+1} + x^2 - x \geq 2 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) \geq 0 \quad (Right)$$

Vậy từ (*) suy ra $x = y$ thay vào (2) ta được

$$(x+1)\left(3x - x^2\right) = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \quad (L) \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1), \left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}; \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$ □

Một câu gần tương tự

Câu 259 $\begin{cases} x - 3\sqrt{x+3} = 3\sqrt{y-5} - y \\ \sqrt{x^2 + 16(y-x)} + y = 2\sqrt{xy} \end{cases}$

Giải

Phương trình (2) tương đương

$$(x-y)\left(\frac{x-16}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+\sqrt{xy}} - \frac{y}{\sqrt{xy}+y}\right) = 0 \quad (*)$$

Giờ ta mong rằng $x \leq 16$.
Phương trình (1) tương đương

$$y - 5 - 3\sqrt{y-5} + x + 3 - 3\sqrt{x+3} + 2 = 0$$

$$\Delta_{\sqrt{y-5}} \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 4(x + 3 - 3\sqrt{x+3} + 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x+3) - 12\sqrt{x+3} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \leq \frac{6+2\sqrt{10}}{4} \Leftrightarrow x < 16$$

Vậy từ (*) suy ra $x = y$ thay lại vào (1) ta được

$$2x = 3\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-5}\right) \Leftrightarrow x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 324 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2(x^2+3x+9) \Leftrightarrow x = y = 6 \quad (TM)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (6; 6)$□

Câu 260 $\begin{cases} (xy+1)^3 + x(y-1) = x^3 - 1 \\ x^3 - 4xy - 4 = 0 \end{cases}$

Giải

Phương trình (1) tương đương

$$(xy+1)^3 + (xy+1) = x^3 + x \Leftrightarrow xy + 1 = x$$

Thay xuống (2) ta được

$$x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad (L) \\ x = -2 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2} \\ x = 2 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(-2; \frac{3}{2}\right), \left(2; \frac{1}{2}\right)$ □

Câu 261 $\begin{cases} (x+6y+3)\sqrt{xy+3y} = (8y+3x+9)y \\ \sqrt{-x^2+8x-24y+417} = (y+3)\sqrt{y-1}+3y+17 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \geq 1, x \geq -3, -x^2+8x-24y+417 \geq 0$
Đặt $\sqrt{x+3} = a \geq 0, \sqrt{y} = b > 0$ thì (1) tương đương

$$(a^2+6b^2)ab = b^2(8b^2+3a^2) \Leftrightarrow a^3-3a^2b+6ab^2-8b^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)(a^2-ab+4b^2) = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 4y$$

Thay xuống (2) ta được

$$4\sqrt{(y+4)(6-y)} = (y+3)\sqrt{y-1}+3y+17$$

Ta có :
$\bullet 4\sqrt{(y+4)(6-y} \leq 2(y+4+6-y) = 20$

$\bullet (y+3)\sqrt{y-1}+3y+17 \geq 3y+17 \geq 3.1+17 = 20$
Đẳng thức xảy ra khi $y = 1 \Rightarrow x = 1$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (1;1)\square$

Câu 262 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+xy = \dfrac{2(x-y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{2}{\sqrt{xy}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x+y = 4 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x, y > 0$
Phương trình (1) tương đương

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{\sqrt{xy}}-2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+xy = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2+2\sqrt{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)+xy = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}+xy\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{xy}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{y} = xy \Rightarrow x+y = x^2y^2+2\sqrt{xy}$$

Thay tất cả vào (2) ta được

$$\sqrt{xy}+2\sqrt{xy}-(xy)^2-4 = 0 \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x+y = 3 \\ x > y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Có vẻ băn khuăn vì sao $x > y$ nhỉ ? Nhớ lại phép biến đổi trên (1) có một đẳng thức là $\sqrt{x}-\sqrt{y}=xy$. Vì $xy > 0 \Rightarrow x > y$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ □

Câu 263 $\begin{cases} y^3+3y^2+y+4x^2-22x+21=(2x+1)\sqrt{2x-1} \\ 2x^2-11x+9=2y \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq \dfrac{1}{2}$

Phương trình (1) tương đương

$$y^3+3y+y+2(2y-9)+21=(2x+1)\sqrt{2x-1}$$
$$(y+1)^3+2(y+1)=(2x-1)\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-1}$$

Hai vế đều có dạng $f(t)=t^3+2t$ và hàm này đơn điệu tăng. Từ đó ta có $y+1=\sqrt{2x-1}$ thay xuống (2) ta được

$$2x^2-11x+11=2\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow (2x-5)^2=\left(\sqrt{2x-1}+2\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=5 \Rightarrow y=2 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;0),(5;2)$□

Câu 264 $\begin{cases} \dfrac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=2 \\ \dfrac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{7}{4} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $0 \leq x^2-y^2 < 1$

Lấy (1)+(2) và (1)-(2) ta được

$$\begin{cases} \dfrac{\left(1-\sqrt{x^2-y^2}\right)(x+y)}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{15}{4} & (3) \\ \dfrac{\left(1+\sqrt{x^2-y^2}\right)(x-y)}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{1}{4} & (4) \end{cases}$$

Lấy (3).(4) ta được

$$\frac{(x^2-y^2)(1-x^2+y^2)}{1-x^2+y^2}=\frac{15}{16} \Leftrightarrow x^2-y^2=\frac{15}{16}$$

Thay lại vào (1) và (2) ta thu được hệ mới sau

$$\begin{cases} x - \dfrac{y\sqrt{15}}{4} = \dfrac{1}{2} \\ y - \dfrac{x\sqrt{15}}{4} = \dfrac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + \dfrac{7\sqrt{15}}{4} \\ y = 7 + 2\sqrt{15} \end{cases} \quad (TM)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(8 + \dfrac{7\sqrt{15}}{4}; 7 + 2\sqrt{15}\right)$ $\square$

Câu 265 $\begin{cases} 9xy^3 - 24y^2 + (27x^2 + 40)y + 3x - 16 = 0 \\ y^2 + (9x - 10)y + 3(x + 3) = 0 \end{cases}$

Giải

Ý tưởng bài toán giống câu 222 nhưng hình thức cồng kềnh hơn.
Hệ đã cho viết lại

$$\begin{cases} 9xy^3 + 27x^2y + 3x + y^2 = 25y^2 - 40y + 16 \\ y^2 + 9xy + 3x + 1 = 10y - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9xy + 1)(y^2 + 3x) = (5y - 4)^2 \\ (9xy + 1) + (y^2 + 3x) = 2(5y - 4) \end{cases}$$

Rõ ràng 2 số $9xy + 1$ và $y^2 + 3x$ là nghiệm của phương trình

$$X^2 - 2(5y - 4)X + (5y - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow X = 5y - 4$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} 9xy + 1 = 5y - 4 \\ y^2 + 3x = 5y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 5y - y^2 - 4 \\ 3y(5y - y^2 - 4) + 1 = 5y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = 2 - \sqrt{\dfrac{7}{3}} \Rightarrow x = \dfrac{-1 - \sqrt{21}}{9} \\ y = 2 + \sqrt{\dfrac{7}{3}} \Rightarrow x = \dfrac{-1 + \sqrt{21}}{9} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{-1 - \sqrt{21}}{9}; 2 - \sqrt{\dfrac{7}{3}}\right), \left(\dfrac{-1 + \sqrt{21}}{9}; 2 + \sqrt{\dfrac{7}{3}}\right), (0; 1)$ $\square$

Câu 266 $\begin{cases} x + \dfrac{x^3}{x + 1} = (y + 2)\sqrt{(x + 1)(y + 1)} \\ 4x\sqrt{y + 1} + 8x = (4x^2 - 4x - 3)\sqrt{x + 1} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x > -1, y \geq -1$
Để ý khi chia 2 vế của (1) cho $\sqrt{x + 1}$ ta sẽ cô lập được 2 ẩn và hi vọng nó sẽ có gì đó đặc biệt.
Thực hiện phép chia và ta thu được

$$\frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} + \frac{x}{(x + 1)\sqrt{x + 1}} = (y + 2)\sqrt{y + 1}$$

Mà ta có

$$\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}+\frac{x}{(x+1)\sqrt{x+1}}=\frac{x^3+x^2+x}{(x+1)\sqrt{x+1}}=\frac{x^3+x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}}=\frac{x^3}{(x+1)\sqrt{x+1}}+\frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

Như vậy phương trình (1) sẽ là

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3+\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\left(\sqrt{y+1}\right)^3+\sqrt{y+1}\Leftrightarrow\sqrt{y+1}=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

Hiển nhiên vì $f(t)=t^3+t$ đơn điệu tăng. Thay xuống (2) và ta được

$$\frac{4x^2}{\sqrt{x+1}}+8x=\left(4x^2-4x-3\right)\sqrt{x+1}\Leftrightarrow 4x^2+8x\sqrt{x+1}=\left(4x^2-4x-3\right)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+8x\sqrt{x+1}+4(x+1)=(2x-1)^2(x+1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+2\sqrt{x+1}=(2x-1)\sqrt{x+1}\\2x+2\sqrt{x+1}=(1-2x)\sqrt{x+1}\end{array}\right.$$

TH1 :

$$2x=(2x-3)\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\Rightarrow y=\dfrac{5}{4}\\x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

TH2 :

$$2x=(-1-2x)\sqrt{x+1}\Rightarrow 4x^3+4x^2+5x+1=0$$

Phương trình bậc 3 này có nghiệm duy nhất nhưng khá lẻ. Cách giải loại này tôi đã nêu ở câu 215.
Đổi ẩn $x=z-\dfrac{1}{3}$. Thay vào phương trình và ta đưa nó về

$$108z^3+99z-10=0$$

Đặt $z=\dfrac{\sqrt{11}}{6}\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$ thay vào phương trình ta được

$$\frac{11\sqrt{11}}{2}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^3=\dfrac{10-3\sqrt{159}}{11\sqrt{11}}\\a^3=\dfrac{10+3\sqrt{159}}{11\sqrt{11}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\sqrt[3]{\dfrac{10-3\sqrt{159}}{11\sqrt{11}}}\\a=\sqrt[3]{\dfrac{10+3\sqrt{159}}{11\sqrt{11}}}\end{array}\right.$$

2 nghiệm này luôn có đặc điểm là tích của chúng bằng -1. Vậy nên 2 trường hợp thay vào z đều ra một kết quả. Từ đó suy ra

$$z=\frac{\sqrt{11}}{6}\left(a-\frac{1}{a}\right)=\frac{\sqrt{11}}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{10+3\sqrt{159}}{11\sqrt{11}}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{10+3\sqrt{159}}{11\sqrt{11}}}}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{10+3\sqrt{159}}-\frac{11}{\sqrt[3]{10+3\sqrt{159}}}\right)$$

Từ đó suy ra

$$x=\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{10+3\sqrt{159}}-\frac{11}{\sqrt[3]{10+3\sqrt{159}}}\right)-\frac{1}{3}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(3;\frac{5}{4}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right),\left(a;\frac{a^2}{a+1}-1\right)$ với $a=\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{10+3\sqrt{159}}-\frac{11}{\sqrt[3]{10+3\sqrt{159}}}\right)-\frac{1}{3}$□

Câu 267 $\begin{cases} x+y^2+9=6\sqrt{x}+5y \\ (2y-\sqrt{x}-4)\sqrt{x}=y+4 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x\geq 0$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases}(\sqrt{x}-3)^2=y(5-y) & (3)\\ x-2(y-2)\sqrt{x}+y+4 & (4)\end{cases}$$

Từ (3) ta có ngay $y(5-y)\geq 0$
Từ (4) ta có $\Delta'_{\sqrt{x}}=y^2-5y\geq 0\Leftrightarrow y(5-y)\leq 0$
Từ 2 điều trên ta thấy ngay điều kiện ràng buộc đã trái ngược nhau. Vậy đẳng thức xảy ra khi

$$\left[\begin{array}{ll} y=0\Rightarrow x=9 & (L)\\ y=5\Rightarrow x=9 & (TM)\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(9;5)$□

Câu 268 $\begin{cases} \sqrt{x+2y+3}+\sqrt{9x+10y+11}=10 \\ \sqrt{12x+13y+14}+\sqrt{28x+29y+30}=20 \end{cases}$

Giải

Đây là một loại hệ cực kì khó chịu chứ ý tưởng không khó mấy. Xuất hiện khá nhiều căn thức và điều kiện không thể gói gọn được. Vậy tạm thời bỏ qua bước này.
Với loại này thường ta sẽ đặt ẩn để cố gắng đưa nó về thuần nhất. Tức là nghĩ cách đặt sao cho hằng số mất hết đi.
Đặt $u=x+y+1, v=y+2$. Ta có hệ mới như sau

$$\begin{cases}\sqrt{u+v}+\sqrt{9u+v}=10\\ \sqrt{12u+v}+\sqrt{28u+v}=20\end{cases}\Rightarrow \sqrt{12u+v}+\sqrt{28u+v}=2\left(\sqrt{u+v}+\sqrt{9u+v}\right)$$

Căn thức vẫn khá nhiều. Tuy nhiên nó đang thuần nhất. Từ đó ta có

$$\sqrt{12t+1}+\sqrt{28t+1}=2\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{9t+1}\right)\Leftrightarrow t=\frac{5}{4}$$

Từ đó rút ra $u = \dfrac{5}{4}v$. Thay vào (1) và ta tìm được

$$\begin{cases} u = 5 \\ v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 = 5 \\ y + 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (2; 2)\square$

Câu 269 $\left\{ \begin{array}{l} y\sqrt{1-x} + x\sqrt{1-y} = 1 \\ \left(1-\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right) = 2 \end{array} \right.$

Giải

Điều kiện : $0 \le x, y \le 1$
Từ (2) ta suy ra

$$1 + \sqrt{x} = \frac{2}{1-\sqrt{y}} \ge 2 \Leftrightarrow x \ge 1$$

Mà từ điều kiện : $x \le 1$. Từ đó suy ra $x = 1 \Rightarrow y = 0 \quad (TM)$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (0; 1)\square$

Câu 270: $\begin{cases} x + 3 = 2\sqrt{(3y-x)(y+1)} \\ \sqrt{3y-2} - \sqrt{\dfrac{x+5}{2}} = xy - 2y - 2 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \ge \frac{2}{3}, x \ge -5, 3y \ge x$

$$(1) \Leftrightarrow 4(y+1) = 3y - x + y + 1 + 2\sqrt{(3y-x)(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{y+1}\right)^2 = \left(\sqrt{3y-x} + \sqrt{y+1}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{y+1} = \sqrt{3y-x} \\ 3\sqrt{y+1} = -\sqrt{3y-x} \quad (L) \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 2y - 1$$

Thay xuống (2) ta được

$$\sqrt{3y-2} - \sqrt{y+2} = 2y^2 - 3y - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(y-2)}{\sqrt{3y-2} + \sqrt{y+2}} = (2y+1)(y-2)$$

Ta có

$$\frac{2}{\sqrt{3y-2} + \sqrt{y+2}} \le \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 2y + 1 \ge \frac{7}{3}$$

Tức là $VP > VT$, vậy từ đó suy ra $y = 2 \Rightarrow x = 1$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 2)\square$

2.10 Câu 271 đến câu 300

Câu 271 $\begin{cases} 6\sqrt{x^3-6x+5} = \left(x+2-\dfrac{6}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{4}{x}\right) \\ \sqrt{x}+\sqrt{10-x} = y^2 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $0 < x \leq 10$, $x^3-6x+5 \geq 0$
Phương trình đầu tương đương

$$6x^2.\sqrt{x^3-6x+5} = (x^2+2x-6)(x^3+4)$$

Để ý $x^3-6x+5 = (x-1)(x^2+x-5)$ và $x^2+2x-6 = (x-1)+(x^2+x-5)$. Dựa vào điều kiện thì hiển nhiên $x-1$ và x^2+x-5 cùng dấu. Kết hợp thêm phương trình (1) 2 đối tượng trên phải > 0. Mà như trên ta tách được về tổng-tích. Có vẻ sẽ dùng $AM-GM$. Nhận thấy $x=2$ là nghiệm, ta dựa vào đó để tách cho phù hợp. Ta có

$$(x^2+2x-6)(x^3+4) = \left((x^2+x-5)+(x-1)\right)\left(\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{2}+4\right)$$
$$\geq 2.\sqrt{(x-1)(x^2+x-5)}.3x^2 = 6x^2.\sqrt{x^3-6x+5}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3\sqrt{2}}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (2;\sqrt{3\sqrt{2}}), (2;-\sqrt{3\sqrt{2}})\square$

Câu 272 $\begin{cases} x^3y+xy = 5+x \\ x^2(x^4y^2-y^2+2y) = 5+x^2 \end{cases}$

Giải

Đặt $x^3y = a, x-xy = b$. Hệ tương đương

$$\begin{cases} x^3y-(x-xy) = 5 \\ x^6y^2-(x-xy)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=5 \\ a^2-b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3y=3 \\ x-xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (1;3)\square$

Câu 273 $\begin{cases} (x^2-1)^2+3 = \dfrac{6x^5y}{x^2+2} \\ 3y-x = \sqrt{\dfrac{4x-3x^2y-9xy^2}{x+3y}} \end{cases}$

Giải

Hình thức bài hệ khá cồng kềnh, điều kiện lại rắc rối nên tạm thời ta bỏ qua bước này.
Với $3y \geq x$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases}(x^4-2x^2+4)(x^2+2)=6x^5y\\(3y-x)^2+=\dfrac{4x}{x+3y}-3xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^6+8=6x^5y \quad (3)\\x^3+27y^3=4x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1+\dfrac{8}{x^6}=\dfrac{6y}{x}\\1+\dfrac{27y^3}{x^3}=\dfrac{4}{x^2}\end{cases}$$

Đặt $\dfrac{3y}{x}=a, \dfrac{2}{x^2}=b$ ta thu được hệ mới

$$\begin{cases}1+a^3=2b\\1+b^3=2a\end{cases} \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow \frac{3y}{x}=\frac{2}{x^2} \Leftrightarrow y=\frac{2}{3x}$$

Thay vào (3) ta được

$$x^6-4x^4+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=2\\x^2=1+\sqrt{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\\x=-\sqrt{2}\Rightarrow y=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\\x=\sqrt{1+\sqrt{5}}\Rightarrow y=\dfrac{2}{3\sqrt{1+\sqrt{5}}}\\x=-\sqrt{1+\sqrt{5}}\Rightarrow y=-\dfrac{2}{3\sqrt{1+\sqrt{5}}}\end{array}\right.$$

Chú ý các điều kiện ban đầu để loại nghiệm.
TH3 loại vì $3y<x$
TH2 loại vì không thỏa căn
Chỉ có TH4 thỏa.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(-\sqrt{1+\sqrt{5}};-\dfrac{2}{3\sqrt{1+\sqrt{5}}}\right)$ □

Câu 274 $\begin{cases}(x-y+2)^2+(x^2+4x+3)(y^2-1)=81\\\sqrt{x}+\sqrt{y-2}=\sqrt{(x+1)(y-1)}\end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x\geq 0, y\geq 2$
Phương trình (2) tương đương

$$x+y-2+2\sqrt{x(y-2)}=xy-x+y-1$$

$$\Leftrightarrow (xy-2x)-2\sqrt{xy-2x}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{xy-2x}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow xy-2x=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{x}+2$$

Thay lên (1) ta được

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+(x^2+4x+3)\left(\left(\frac{1}{x}+2\right)^2-1\right)=81 \Leftrightarrow 4(x+1)^4=81x^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 4 \\ x = 2 \Rightarrow y = \dfrac{5}{2} \\ x = \dfrac{-13 \pm 3\sqrt{17}}{4} \quad (L) \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 4\right), \left(2; \frac{5}{2}\right)$ □

Câu 275 $\begin{cases} \sqrt{9x + \dfrac{y}{x}} + 2\sqrt{y + \dfrac{2x}{y}} = 4 \\ \left(\dfrac{2x}{y^2} - 1\right)\left(\dfrac{y}{x^2} - 9\right) = 18 \end{cases}$

Giải

Mấu chốt ở đây có lẽ là tìm cách biến đổi khéo léo phương trình (2) bởi (1) cho như kia có lẽ chỉ gợi ý cho chúng ta hướng đặt ẩn phụ.
Phương trình (2) tương đương

$$(2x - y^2)(y - 9x^2) = 18x^2y^2 \Leftrightarrow 9x^2y^2 + 18x^3 + y^3 = 2xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2y^2 + 18x^3 + y^3}{xy} = 2 \Leftrightarrow 9xy + \frac{18x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 9x\left(y + \frac{2x}{y}\right) + \frac{y}{x}\left(y + \frac{2x}{y}\right) = 4 \Leftrightarrow \left(9x + \frac{y}{x}\right)\left(y + \frac{2x}{y}\right) = 4$$

Như vậy đặt $\sqrt{9x + \dfrac{y}{x}} = a$, $\sqrt{y + \dfrac{2x}{y}} = b$ ta có hệ

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2, b = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + \dfrac{y}{x} = 4 \\ y + \dfrac{2x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 + y = 4x \\ y^2 + 2x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 9x^2 \\ (4x - 9x^2)^2 + 2x = 4x - 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad (L) \\ x = \dfrac{1}{9} \Rightarrow y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$ □

Câu 276 $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - y} + \dfrac{5y}{x + y^2} = 4 \\ 5x + y + \dfrac{x^2 - 5y^2}{xy} = 5 \end{cases}$

Giải

Thoạt nhìn có vẻ đơn giản nhưng đây là một bài tương đối. Cần chú ý thật tốt trong biến đổi đẳng thức để đạt được mục đích.

Điều kiện : $x, y \neq 0, x \neq -y^2, y \neq x^2$
Phương trình (2) tương đương

$$y + \frac{x}{y} + 5x - \frac{5y}{x} = 5 \Leftrightarrow \frac{x+y^2}{x} + 5.\frac{x^2-y}{x} = 5$$

Đến đây đặt $\dfrac{x^2-y}{x} = a, \dfrac{x+y^2}{y} = b$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{5}{b} = 4 \\ b + 5a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2-y) = x \\ 2(x+y^2) = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2}, y = 3 \\ x = 1, y = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{3}{2}, y = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(-\frac{3}{2}; 3\right), \left(1; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ □

Câu 277 $\begin{cases} \dfrac{1}{(x+y+1)} + \dfrac{1}{(x-y+1)^2} = 2 \\ x^2 + 2x = y^2 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \neq \pm(x+1)$
Từ phương trình (2) ta có

$$(x+1)^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-y+1)(x+y+1) = 1$$

Đặt $\dfrac{1}{x+y+1} = a, \dfrac{1}{x-y+1} = b$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 2 \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 = 1 \\ x-y+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (0; 0)$□

Câu 278 $\begin{cases} 2x - y - xy^2 = 2xy(1-x) \\ (x^2+2y^2)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right)^2 = 12 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x, y \neq 0$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} (2x^2y - xy^2) + 2x - y = 2xy \\ (x^2+2y^2)\left(\dfrac{1}{x^2y^2} + \dfrac{2}{xy} + 1\right) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(xy+1) - y(xy+1) = 2xy \\ \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{2x}{y} + x^2 + 2\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2y}{x} + y^2\right) = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\dfrac{xy+1}{y}\right) - \left(\dfrac{xy+1}{x}\right) = 2 \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2 + 2\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\dfrac{1}{y}+x\right) - \left(\dfrac{1}{x}+y\right) = 2 \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2 + 2\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^2 = 12 \end{cases}$$

Đặt $\dfrac{1}{y}+x=a, \dfrac{1}{x}+y=b$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} 2a-b=2 \\ a^2+2b^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2, b=2 \\ a=-\dfrac{2}{9}, b=-\dfrac{22}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{1}{y}+x=2 \\ \dfrac{1}{x}+y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{y}+x=-\dfrac{2}{9} \\ \dfrac{1}{x}+y=-\dfrac{22}{9} \end{cases} \end{array}\right.$$

TH1 : Dễ dàng giải ra $x=y=1$
TH2 : Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} xy+1=-\dfrac{2}{9}y \\ xy+1=-\dfrac{22}{9}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=11x \\ \dfrac{1}{x}+11x=-\dfrac{22}{9} \end{cases} (VN)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1)\square$

Câu 279 $\begin{cases} x^5+10x^4+42x^3-12x-56=y^5-2y^3 \\ 23x^2+29x+26=y^3 \end{cases}$

Giải

Trước hết nhìn vào phương trình (1) thấy số mũ khá cao. Có lẽ nó gần là một hằng đẳng thức nào đó. Ta sẽ phải thêm một lượng phù hợp từ (2) vào. Tiếp tục để ý vế trái phương trình (1) có x^5+10x^4. Có vẻ sẽ là $(x+2)^5$. Vế phải có y^5 vậy ta thử cho $y=x+2$ thay vào hệ xem. Ta sẽ có

$$\begin{cases} -4x^3+68x^2+68x+72=0 \\ x^3-17x^2-17x-18=0 \end{cases}$$

Vậy ta lấy $PT(1)+4.PT(2)$ vế với vế và ta thu được

$$(x+2)^5+2(x+2)^3=y^5+2y^3 \Leftrightarrow y=x+2$$

Thay vào (2) ta được

$$x^3-17x^2-17x-18=0 \Leftrightarrow x=18 \Rightarrow y=20$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(18;20)\square$

Câu 280 $\begin{cases} 49152x^8 + 16394y^8 = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

Giải

Thế $y = 1 - 3x$ lên (1) ta thu được

$$3x^8 + 3(1-3x)^8 = \frac{1}{2^{14}}$$

Một phương trình bậc khá cao. Loại này có lẽ chỉ đánh giá mới diệt được. Nhìn hình thức có lẽ sẽ dùng $Cauchy - Schwarz$ để đánh giá.
Ta có

$$VT = \frac{1}{4}(1+1+1+1)(x^8+x^8+x^8+(1-3x)^8) \geq \frac{1}{4}\left(x^4+x^4+x^4+(1-3x)^4\right)^2$$
$$= \frac{1}{64}(1+1+1+1)^2\left(x^4+x^4+x^4+(1-3x)^4\right)^2 \geq \ldots \geq \frac{1}{2^{14}}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ $\square$

Câu 281 $\begin{cases} (x-1)^2.\sqrt{y} + x(y-1) = 0 \\ \left(x + \dfrac{y}{x}\right)\left(xy + \dfrac{1}{x}\right) = 4y \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \neq 0, y \geq 0$
Xét phương trình (2) giả sử có nghiệm thì hiển nhiên $x > 0$. Ta có

$$\left(x + \frac{y}{x}\right)\left(xy + \frac{1}{x}\right) \geq 2\sqrt{x.\frac{y}{x}}.2\sqrt{\frac{xy}{x}} = 4y$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{x} \\ xy = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Thay vào (1) thấy thỏa mãn.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (1;1)$ $\square$

Câu 282 $\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+y} + \sqrt{x^2+3}\right)x = y - 3 \\ \sqrt{x^2+y} + \sqrt{x} = x + 3 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq 0, x^2 + y \geq 0$

Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{(y-3)x}{\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+3}}=y-3$$

TH1 : $y=3$ thay vào (2) ta được

$$x^2+3+\sqrt{x}=x+3$$

Tiến hành bình phương 2 lần ta thu được phương trình sau :

$$4x^3-25x^2-48x-36=0$$

Phương trình bậc 3 này có nghiệm duy nhất lẻ. Phương pháp tôi đã nêu ở câu 215. Coi như một bài tập cho bạn đọc.
Nghiệm : $x=\frac{1}{12}\left(25+\sqrt[3]{45001-1080\sqrt{251}}+\sqrt[3]{45001+1080\sqrt{251}}\right)$ □

TH2 : $\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+3}=x$ thay xuống (2) ta được

$$\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=8$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm :
$(x;y)=(1;8),\left(\frac{1}{12}\left(25+\sqrt[3]{45001-1080\sqrt{251}}+\sqrt[3]{45001+1080\sqrt{251}}\right);3\right)$ □

Câu 283 $\begin{cases} x^2+2x\sqrt{y}=y^2.\sqrt{y} \\ (4x^3+y^3+3x^2.\sqrt{x})(15\sqrt{x}+y)=3\sqrt{x}(y\sqrt{y}+x\sqrt{y}+4x\sqrt{x})^2 \end{cases}$

Giải

Tác giả bài toán là Hoanghai1195, một Smod trên diễn đàn k2pi. Những bài hệ của anh thường là cực mạnh, ý tưởng đầy tính đánh đố và thách thức.
Điều kiện : $x,y\geq 0$
Đặt $\sqrt{x}=a,\sqrt{y}=b$ hệ viết lại thành

$$\begin{cases} a^4+2a^3b=b^5 \\ (4a^6+b^6+3a^5)(15a+b^2)=3a\left(b^4+a^2b+4a^3\right)^2 \end{cases}$$

Ta có : $a=b=0$ là một nghiệm của hệ.
Giờ xét $a,b>0$. Đặt $b=ka$. Phương trình (1) khi đó trở thành

$$1+2k=ak^5\Leftrightarrow a=\frac{1+2k}{k^5}\quad(*)$$

Phương trình (2) trở thành

$$\left(4a^6+a^6k^6+3a^5\right)\left(15a^2+k^2a^2\right)=3a\left(k^3a^3+a^3k+4a^3\right)^2$$

Thế a từ (*) vào ta được

$$\left(4+k^6+\frac{3k^5}{1+2k}\right)\left(5+\frac{1+2k}{3k^3}\right)=(k^3+k+4)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ cho vế trái ta được

$$VT\geq\left(\sqrt{5(4+k^6)}+\sqrt{\frac{3k^5}{1+2k}.\frac{1+2k}{3k^3}}\right)^2=\left(\sqrt{(2^2+1^2)(4+k^6)}+k\right)^2\geq(4+k^3+k)^2=VP$$

Đẳng thức xảy ra khi $k=1\Leftrightarrow a=b=3\Leftrightarrow x=y=9$.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(0;0),(9;9)\square$

Câu 284 $\begin{cases}9\sqrt{\dfrac{41}{2}\left(x^2+\dfrac{1}{2x+y}\right)}=3+40x\\ x^2+5xy+6y=4y^2+9x+9\\ x,y>0\end{cases}$

Giải

Tiếp tục là một câu cực mạnh và hại não của Hoanghai1195.
Phương trình (1) tương đương

$$\sqrt{82\left(x^2+\frac{1}{2x+y}\right)}=\frac{6+80x}{9}$$

Ta có

$$VT=\sqrt{(1^2+9^2)\left(x^2+\frac{1}{2x+y}\right)}\geq\left|9x+\frac{1}{\sqrt{2x+y}}\right|\geq 9x+\frac{3}{\sqrt{9(2x+y)}}\geq 9x+\frac{6}{2x+y+9}$$

$$\Rightarrow\frac{6+80x}{9}\geq\frac{6}{2x+y+9}\Leftrightarrow 3x-2x^2-xy+6y\geq 0\quad(*)$$

Lấy (*) cộng với PT(2) ta thu được

$$-x^2+4xy-4y^2+12y-6x-9=0\geq 0\Leftrightarrow-(x-2y+3)^2\geq 0\Leftrightarrow x+3=2y$$

Để các dấu bằng trên xảy ra thì $x=y=3$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(3;3)\square$

Câu 285 $\begin{cases} x+\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}+x}+y^2=0 \\ \dfrac{x^2}{y^2}+2\sqrt{x^2+1}+y^2=3 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \neq 0$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x+y\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+y^2=0 \\ \left(\dfrac{x}{y}+y\right)^2+2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}+y\right)+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=0 \\ \left(\dfrac{x}{y}+y\right)^2+2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=3 \end{cases}$$

Đặt $\dfrac{x}{y}+y=a, \sqrt{1+x^2}-x=b>0$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a^2+2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1, b=1 \\ a=3, b=-3 \quad (L) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y}+y=-1 \\ \sqrt{x^2+1}=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y)=(0;-1)\square$

Câu 286 $\begin{cases} (x-y)^2\left(\sqrt{3x^2-xy+2y^2+2}+1\right)=3 \\ 2x^2+y^2+xy=1 \end{cases}$

Giải

Một kinh nghiệm nhỏ : khi nhìn thấy một căn thức với biểu thức khá dài như kia, thường thì tác giả cố ý để vậy nhằm khiến chúng ta sử dụng phép thế từ phương trình còn lại.
Từ phương trình (2) ta có

$$3x^2-xy+2y^2=1+(x-y)^2$$

Thay lên (1) ta được

$$(x-y)^2\left(\sqrt{(x-y)^2+3}+1\right)=3 \Leftrightarrow t\left(\sqrt{t+3}+1\right)=3 \qquad t=(x-y)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1 \\ 2x^2+y^2+xy=1 \end{cases}$$

Đây là một hệ đẳng cấp bậc 2 khá đơn giản, việc giải nó xin nhường lại bạn đọc.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y)=\left(-\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{4}\right), \left(\dfrac{3}{4}; -\dfrac{1}{4}\right), (0;-1), (0; 1)\square$

Câu 287 $\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x^2+y^2 \neq 0$
Một bài toán khá hay và đặc sắc về mặt ý tưởng.
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{x^2y^2+x^2}{x^2+y^2}=\dfrac{3x}{5} & (3) \\ \dfrac{y^2x^2-y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{4y}{5} & (4) \end{cases}$$

Lấy (3)-(4) ta có

$$\frac{3x}{5}-\frac{4y}{5}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1 \Leftrightarrow 3x-4y=5$$

Đến đây rút $x=\dfrac{5+4y}{3}$ thay vào (1) ta có

$$5.\frac{5+4y}{3}.(y^2+1)=3\left(\frac{5+4y}{3}\right)^2+3y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{3} \\ y=1 \Rightarrow x=3 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{1}{3};-1\right),(3;1)\square$

Câu 288 $\begin{cases} 2x^2+3=(4x^2-2yx^2)\sqrt{3-2y}+\dfrac{4x^2+1}{x} \\ \sqrt{2-\sqrt{3-2y}}=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+x^3}+x+2}{2x+1} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \neq 0, x \neq -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2} \leq y \leq \dfrac{3}{2}$
Chia 2 vế của (1) cho x^2 ta được

$$-\frac{1}{x^3}-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x}+2=(4-2y)\sqrt{3-2y}$$
$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right)=(3-2y)\sqrt{3-2y}+\sqrt{3-2y}$$
$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=\sqrt{3-2y}$$

Thay vào (2) ta có

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt[3]{2x^2+x^3}+x+2}{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{1+\frac{1}{x}} = (x+2) + \sqrt[3]{2x^2+x^3}$$
$$\Leftrightarrow \left(2+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \left(\frac{2}{x}+1\right) + \sqrt[3]{\frac{2}{x}+1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{\frac{2}{x}+1} \Leftrightarrow \sqrt{t+1} = \sqrt[3]{2t+1} \qquad \left(\frac{1}{x}=t\right)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq t \geq -\dfrac{1}{2} \\ (t+1)^3 = (2t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow y = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}\right)$ □

Câu 289 $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{6y}{x} \\ x^3y^3 - 4x^2y^2 + 2xy + 5y^3 = 1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x, y \neq 0$
Hệ đã cho tương đương
$$\begin{cases} x^2y + x = 6y^2 \\ (xy-1)^3 = -5y^3 + x^2y^2 + xy \end{cases}$$
Ta có : $-5y^3 + x^2y^2 + xy = -5y^3 + (6y^2 - x)y + xy = y^3$
Vậy (2) tương đương
$$xy - 1 = y \Leftrightarrow y = \frac{1}{x-1}$$
Thay lên (1) ta có
$$x + x - 1 = \frac{6}{x(x-1)} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (2;1)$□

Câu 290 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{1+xy} = \dfrac{1-2y}{2-y} \\ \dfrac{x-y}{1-xy} = \dfrac{1-3x}{3-x} \end{cases}$

Giải

Thoạt nhìn thì hình thức của bài hệ chả có gì to tát cả. Tuy nhiên, đây là một hệ cực mạnh, một siêu hệ đích thực. Tác giả của nó hẳn đã sáng tác dựa vào các phép toán của hàm Hypebolic. Tôi sẽ giới thiệu cho bạn đọc 2 cách của bài này. Một cách học được còn một cách là làm được.
Điều kiện : $xy \neq \pm 1, x \neq 3, y \neq 2$

Cách 1 :

Đặt $x = \dfrac{u-1}{u+1}, y = \dfrac{v-1}{v+1}$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{u-v}{u+v} = \dfrac{2-u}{2+u} \\ \dfrac{uv-1}{uv+1} = \dfrac{3-v}{3+v} \end{cases}$$

Áp dụng tính chất tỉ lệ thức cho phương trình (1) ta có

$$\frac{u-v}{u+v} = \frac{2-u}{2+u} = \frac{2-v}{2u+v+2} = \frac{2+v-2u}{2-v}$$

$$\Rightarrow (2-v)^2 + (2+v)^2 - 4u^2 \Leftrightarrow u^2 = 2v \quad (*)$$

Tương tự áp dụng cho (2) ta có

$$\frac{uv-1}{uv+1} = \frac{3-v}{3+v} = \frac{3u-uv}{3u+uv} = \frac{3u-1}{3u+1+2uv} = \frac{3u+1-2uv}{3u-1}$$

$$\Rightarrow (3u-1)^2 = (3u+1)^2 - 4u^2v^2 \Leftrightarrow 3u = u^2v^2 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có hệ mới

$$\begin{cases} u^2 = 2v \\ u^2v^2 = 3u \end{cases} \Rightarrow u^6 = 12u \Leftrightarrow u = \sqrt[5]{12}, v = \sqrt[5]{\frac{9}{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt[5]{12}-1}{\sqrt[5]{12}+1}, \quad y = \frac{\sqrt[5]{\frac{9}{2}}-1}{\sqrt[5]{\frac{9}{2}}+1}$$

Cách 2:

Phương trình (1) tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{1+xy} + 1 = \dfrac{1-2y}{2-y} + 1 \\ \dfrac{x+y}{1+xy} - 1 = \dfrac{1-2y}{2-y} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy} = \dfrac{-3(y-1)}{2-y} \\ \dfrac{-(x-1)(y-1)}{1+xy} = \dfrac{-(y+1)}{2-y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(y+1)}{-3(y-1)} = \dfrac{1+xy}{2-y} \\ \dfrac{(x-1)(y-1)}{y+1} = \dfrac{1+xy}{2-y} \end{cases} \Leftrightarrow -3(x-1)(y-1)^2 = (x+1)(y+1)^2 \quad (*)$$

Tương tự với phương trình (2) ta cũng có

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{1-xy} + 1 = \dfrac{1-3x}{3-x} + 1 \\ \dfrac{x-y}{1-xy} - 1 = \dfrac{1-3x}{3-x} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-(x+1)(y-1)}{1-xy} = \dfrac{-4(x-1)}{3-x} \\ \dfrac{(x-1)(y+1)}{1-xy} = \dfrac{-2(x+1)}{3-x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2(x-1)^2(y+1) = (x+1)^2(y-1) \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta đặt $a=\dfrac{x-1}{x+1}, b=\dfrac{y+1}{y-1}$ và ta lập một hệ mới

$$\begin{cases}-3a=b^2\\-2a^2=\dfrac{1}{b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\sqrt[5]{-\dfrac{9}{2}}\\a=\sqrt[5]{-\dfrac{1}{12}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1}=\sqrt[5]{-\dfrac{1}{12}}\\\dfrac{y+1}{y-1}=\sqrt[5]{-\dfrac{9}{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{9}{2}}-1}{\sqrt[5]{\dfrac{9}{2}}+1}\\x=\dfrac{\sqrt[5]{12}-1}{\sqrt[5]{12}+1}\end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt[5]{12}-1}{\sqrt[5]{12}+1},\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{9}{2}}-1}{\sqrt[5]{\dfrac{9}{2}}+1}\right)$ □

Câu 291 $\begin{cases}x^2(y^2+1)+2y(x^2+x+1)=3\\(x^2+x)(y^2+y)=1\end{cases}$

Giải

Phương trình (2) không tự nhiên khi vế trái không đẩy nhân tử chung ra ngoài. Có lẽ nếu để như vậy có khả năng sẽ lộ ý tưởng đặt ẩn phụ. Ta đã mường tượng ra một phần ý tưởng, giờ chỉ cần biến đổi nữa thôi.
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases}(xy+x)^2+2(xy+y)=3\\xy(x+1)(y+1)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(xy+x)^2+2(xy+y)=3\\(xy+y)(xy+x)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+2b=3\\ab=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1,b=1\\a=-2,b=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy+x=1\\xy+y=1\end{cases}\\\begin{cases}xy+x=-2\\xy+y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\x=y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ □

Câu 292 $\begin{cases}2y^3+(x+y+7)\sqrt[3]{y+7}+x^2+7x=0\\\dfrac{3x^2+35x+98}{\sqrt[3]{x+7}}+3(x+7)=y\left(\sqrt[3]{x+7}-2y\right)\end{cases}$

Giải

Hình thức của bài hệ khá cồng kềnh. Nên đặt ẩn để giảm bớt cồng kềnh.
Điều kiện : $x\neq-7$

Đặt $\sqrt[3]{x+7}=a, y=b$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2a^5+a^6-7a^3+2a^2b+2b^3=0 \\ 3a^6-7a^3+3a^4-2ab^2-a^2b=0 \quad (*) \end{cases}$$

Hệ này bậc khá cao. Tuy nhiên một cách hơi bản năng đó là ta trừ 2 phương trình cho nhau, lý do khá hài hước và hiển nhiên đó là làm mất $7a^3$ đi. Trừ 2 phương trình cho nhau ta được

$$a^6-2a^5+3a^4+2ab^2-3a^2b-2b^3=0 \Leftrightarrow 2(a^6-b^3)-2a(a^4-b^2)+3a^2(a^2-b)=0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-b)\left(2(a^4+a^2b+b^2)-2a(a^2+b)+3a^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-b)\left((a^4-2a^3+a^2)+(a^4+2a^2b+b^2)+(a^2-2ab+b^2)+a^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-b)\left((a^2-a)^2+(a^2+b)^2+(a-b)^2+a^2\right)=0 \Leftrightarrow b=a^2$$

Thay lên (*) ta thu được

$$3a^6-7a^3+3a^4-2a^5-a^4=0 \Leftrightarrow 3a^3+2a^2+2a-7=0$$

$$\Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=1 \Leftrightarrow x=-6, y=1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(-6;1)\square$

Câu 293 $\begin{cases} (x-y)^2+4(x+3y)=28+8\sqrt{y(x-2)}+8\sqrt{(y-2)(x-4)} \\ \sqrt{(y-2)(x-4)}+2\sqrt{(y-3)(x-5)}=(y-x)^2 \end{cases}$

Giải

Bạn đọc có nhận xét thấy rằng những hạng tử trong căn có vẻ rất khiêu khích người làm không ? Chúng khác nhau nhưng đều tuân theo 1 quy luật. Có vẻ như là $x=y+2$. Vậy có khả năng sẽ rút được bằng cách liên hợp hoặc đánh giá một phương trình nào đó. Nếu liên hợp thì chắc chắn phải xuất phát từ (1). Ta chuyển 28 sang rồi liên hợp 2 căn xem được gì không? Có vẻ không ra. Vậy phải dùng đánh giá để diệt, tất nhiên bài này đánh giá khá khó.
Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy+4x+12y+4=32+8\sqrt{y(x-2)}+8\sqrt{(y-2)(x-4)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y+2)^2=2\left[xy-2x-4y+16+4\sqrt{y(x-2)}+4\sqrt{(y-2)(x-4)}\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y+2)^2=2\left[(y-2)(x-4)+4\sqrt{(y-2)(x-4)}+8+4\sqrt{y(x-2)}\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y+2)^2=2\left[\left(\sqrt{(y-2)(x-4)}+2\right)^2+4\sqrt{y(x-2)}+4\right]$$

Ta thực hiện các đánh giá sau

$$x^2+(y+2)^2\ge 2x(y+2)=2[x-2+2](y+2)$$

$$\ge 2\left(\sqrt{y(x-2)}+2\right)^2=2\left[(y-2+2)(x-4+2)+4\sqrt{y(x-2)}+4\right]$$

$$\ge 2\left[\left(\sqrt{(y-2)(x-4)}+2\right)^2+4\sqrt{y(x-2)}+4\right]=VP$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ \dfrac{x-2}{y} = \dfrac{2}{2} \\ \dfrac{x-4}{y-2} = \dfrac{2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y + 2$$

Thay xuống (2) và ta thu được

$$|y-2| + 2|y-3| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4 \Rightarrow x = 6 \\ y = \dfrac{4}{3} \Rightarrow x = \dfrac{10}{3} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (6;4), \left(\dfrac{10}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$ $\square$

Câu 294 $\begin{cases} (x-2)\sqrt{1 + \dfrac{3x}{y}} = 2x - y \\ y^2\sqrt{1 + \dfrac{3x}{y}} = 2x^2 + y^2 - 4x \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \neq 0, \dfrac{3x}{y} + 1 \geq 0$

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{2}{y}\right)\sqrt{1 + \dfrac{3x}{y}} = \dfrac{2x}{y} - 1 \\ \sqrt{1 + \dfrac{3x}{y}} = 2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 1 - \dfrac{4x}{y} \end{cases}$$

Đặt $\dfrac{x}{y} = a, \dfrac{1}{y} = b$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} (a-2b)\sqrt{1+3a} = 2a - 1 \\ \sqrt{1+3a} = 2a^2 - 4ab + 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1+3a}(a - 2b + 1) = 2a(a - 2b + 1)$$

TH1 : $2a = \sqrt{1+3a} \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow x = y$. Thay vào (1) ta có

$$2(x-2) = x \Leftrightarrow x = y = 4$$

TH2 : $a + 1 = 2b \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} + 1 = \dfrac{2}{y} \Leftrightarrow x + y = 2$. Thay lên (1) ta có

$$-y\sqrt{1 + \dfrac{3(2-y)}{y}} = 2(2-y) - y \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (4;4), (2;0)$ $\square$

Câu 295 $\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2} \\ 8xy^3 + 2y^2 + \dfrac{1}{2} = 4x^4 + 3x^2 + x + 2\sqrt{1 + (2x - y)^2} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $0 \le xy \le 1$
Ta có các đánh giá sau

$$y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy(1 - xy)} \le \frac{xy + 1 - xy}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2y^6 + 2y^3 + 4x^2 \le 1 \Leftrightarrow 1 \ge 2y^6 + 2y^3 + 4x^2 \quad (*)$$

$$8xy^3 + 2y^3 + \frac{1}{2} \ge 4x^4 + 3x^2 + x + 2 \quad (**)$$

Cộng (*) với (**) vế với vế ta được

$$8xy^3 + 2y^3 + \frac{3}{2} \ge 2y^6 + 2y^3 + 4x^2 + 4x^4 + 3x^2 + x + 2$$
$$\Leftrightarrow 2y^6 - 8xy^3 + 4x^4 + 7x^2 + x + \frac{1}{2} \le 0$$
$$\Leftrightarrow 2(y^6 - 4xy^3 + 4x^2) + \left(4x^4 - 2x^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) \le 0$$
$$\Leftrightarrow 2(y^3 - 2x)^2 + \left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \le 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases} \quad (TM)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(-\dfrac{1}{2}; -1\right)$ $\square$

Trước khi đến câu tiếp theo ta cùng xem xét bài toán sau :
Xét số phức

$$z = a + bi = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^2 = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i$$

Cân bằng phần thực và ảo ta được hệ sau

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = a \\ 3x^2y - y^3 = b \end{cases}$$

Chọn a, b và ta được những hệ đẳng cấp bậc 3 vô cùng đánh đố. Tôi sẽ nêu một vài ví dụ cho bạn đọc.

Câu 296 $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = \dfrac{5}{2} \\ 3x^2y - y^3 = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Giải

Rõ ràng là một hệ đẳng cấp bậc 3 tuy nhiên nghiệm thuộc loại siêu xấu, đơn giản vì nó chế từ bài toán kia ra. Ta sẽ suy ngược lại để giải nó.
Nhân phương trình (2) với i ta được

$$3x^2yi - 2y^3i = \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

Biến đổi một chút đồng thời cộng với phương trình (1) ta được

$$x^3 + 3xy^2i^2 + 3x^2yi + y^3i^3 = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 5\left(\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \qquad (z = x + yi)$$

Theo công thức *Moivre* ta thu được các nghiệm sau

$$\left[\begin{array}{l} z = \sqrt[3]{5}\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}\right) \\ z = \sqrt[3]{5}\left(\cos\dfrac{7\pi}{9} + i\sin\dfrac{7\pi}{9}\right) \\ z = \sqrt[3]{5}\left(\cos\dfrac{13\pi}{9} + i\sin\dfrac{13\pi}{9}\right) \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm :
$(x;y) = \left(\sqrt[3]{5}\cos\dfrac{\pi}{9}; \sqrt[3]{5}\sin\dfrac{\pi}{9}\right), \left(\sqrt[3]{5}\cos\dfrac{7\pi}{9}; \sqrt[3]{5}\sin\dfrac{7\pi}{9}\right), \left(\sqrt[3]{5}\cos\dfrac{13\pi}{9}; \sqrt[3]{5}\sin\dfrac{13\pi}{9}\right)$ □

Câu 297 $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$

Giải

Làm tương tự ta sẽ được

$$(x + yi)^3 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Từ đó ta tìm được nghiệm :
$(x;y) = \left(\sqrt[6]{2}\cos\dfrac{\pi}{12}; \sqrt[6]{2}\sin\dfrac{\pi}{12}\right), \left(\sqrt[6]{2}\cos\dfrac{3\pi}{4}; \sqrt[6]{2}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right), \left(\sqrt[6]{2}\cos\dfrac{17\pi}{12}; \sqrt[6]{2}\sin\dfrac{17\pi}{12}\right)$ □

Một ví dụ nữa là bài tập cho bạn đọc

Câu 298 $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -1 \\ 3x^2y - y^3 = -\sqrt{3} \end{cases}$

Nếu bài toán gốc phía trên ta nâng thành bậc 4,5 thì ta sẽ được những hệ đẳng cấp bậc 4,5 khá đánh đố. Một lời khuyên nhỏ cho các bạn : khi gặp những hệ đẳng cấp nghiệm quá lẻ, hãy nhớ đến bài toán trên, rất có thể ý tưởng của nó là thế.

Câu 299 $\begin{cases} 4(x+y)(x+1)(y+1) = 5xy + (x+y+1)^3 \\ \sqrt{(2-x)(x-1)} = \sqrt{(3-y)(y-1)} \end{cases}$

Giải

Một bài toán hấp dẫn. Hãy cùng tôi phân tích nó.
Trước hết nhận thấy sự bất ổn trong phương trình (2). Tại sao lại là $\sqrt{(2-x)(x-1)} = \sqrt{(3-y)(y-1)}$ chứ không phải là $(2-x)(x-1) = (3-y)(y-1)$. Phải chăng tác giả cố ý để như vậy hòng tạo điều kiện của ẩn để đánh giá một cái gì đó ?
Tiếp theo chúng ta để ý phương trình (1). Nếu tinh ý ta sẽ nhận ra sự thuần nhất của 3 biến $x, y, 1$. Đặc biệt nghiệm của hệ lại là $x = y = 1$. Phải chăng là 3 biến bằng nhau ? Có vẻ mùi bất đẳng thức đã thoang thoảng đâu đây. Để đưa về 3 biến ta không ngại đặt thêm ẩn.
Điều kiện : $1 \le x \le 2, 1 \le y \le 3$
Đặt $z = 1$ thì $x \ge z, y \ge z$
Phương trình (1) tương đương

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 + 5xyz = 4(x+y)(x+z)(y+z)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 5xyz = (x+y)(y+z)(x+z)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 5xyz = xy(x+y) + yz(y+z) + xz(x+z) + 2xyz$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = xy(x+y) + yz(y+z) + xz(x+z)$$

Đến đây những ai yêu mến bất đẳng thức không thể không nhận ra đây là một dạng của bất đẳng thức *Schur*. Ta có $VT \ge VP$. Đẳng thức xảy ra khi 3 biến bằng nhau hoặc 2 biến bằng nhau, biến còn lại bằng 0. Tất nhiên trường hợp (2) không xảy ra do điều kiện.

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1)$ $\square$

Câu 300 $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{2x-y} = \dfrac{3}{2} \\ (x+y+xy+1)(2x-y+1) = \dfrac{125}{64} \end{cases}$

Giải

Tiếp tục đến một bài hệ thuộc loại khá dị.
Để ý một chút thì phương trình (2) sẽ là

$$(x+1)(y+1)(2x-y+1)=\frac{125}{64}$$

Như vậy phương trình (2) xuất hiện bình phương 3 cái căn của phương trình (1). Vậy ta thử đặt $\sqrt{x}=a, \sqrt{y}=b, \sqrt{2x-y}=c \quad a,b,c\geq 0$. Hệ khi đó sẽ là

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{3}{2} \\ (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=\dfrac{125}{64} \end{cases}$$

Để ý những đặc điểm sau :
• Ba biến không âm
• Hệ này lại có nghiệm khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$
Có vẻ như lại là một bài bất đẳng thức nữa rồi. Vậy ra bài hệ này chỉ là hình thức để che giấu một bài bất đẳng thức thực sự.
Ta sẽ chứng minh. Nếu $a,b,c\geq 0$ và $a+b+c=\dfrac{3}{2}$ thì

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\geq\frac{125}{64}$$

Cách chứng minh "chân quê" nhất vẫn là dồn biến.
Đặt vế trái là $f(a,b,c)$. Trước hết ta sẽ chứng minh

$$f(a,b,c)\geq f(a,t,t) \qquad \left(t=\frac{b+c}{2}\right)$$

Ta có

$$f(a,b,c)-f(a,t,t)=(a^2+1)(b-c)^2\left[8-(b+c)^2-4bc\right]\geq 0 \qquad (*)$$

Vì $(b+c)^2+4bc\leq 2(b+c)^2<8$ nên (*) là đúng.
Giờ ta phải chứng minh

$$f(a,t,t)\geq\frac{125}{64}\Leftrightarrow f\left(a,\frac{\frac{3}{2}-a}{2},\frac{\frac{3}{2}-a}{2}\right)\geq\frac{125}{64} \qquad \left(a+2t=\frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a^2+1)\left(\left(\frac{\frac{3}{2}-a}{2}\right)^2+1\right)^2\geq\frac{125}{64}$$

$$\Leftrightarrow (a^2+1)(4a^2-12a+25)^2\geq 500\Leftrightarrow (2a-1)^2(4a^4-20a^3+69a^2-100a+125)\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $4a^4-20a^3+69a^2-100a+125=(2a^2-5a)^2+34a^2-100a+125>0$
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=y=\dfrac{1}{4}$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$ □

2.11 Câu 301 đến câu 330

Câu 301 $\begin{cases} \dfrac{2x^2+4y^2}{xy} = 4\sqrt{\left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{x}\right)(x+y)} - 1 \\ \sqrt{(x+1)^2+xy+3x+2y+5-2x\sqrt{x(y+3)}} = \sqrt{x}+\sqrt{y+3} \end{cases}$

Giải

Hình thức bài hệ quá khủng bố, điều kiện cũng khá nhiều.
Nhận xét thấy sự thuần nhất từ phương trình thứ nhất. Mặc dù nó phức tạp nhưng chắc chắn khai thác tốt ta sẽ rút ra được $x = ty$ nào đó.
Phương trình (1) tương đương

$$\Leftrightarrow 2x^2+xy+4y^2 = 4\sqrt{(2x-3y)\,x\,(x+y)\,y}$$

$$\Leftrightarrow (4y^2+4xy)+(2x^2-3xy) = 2\sqrt{(2x^2-3xy)\,(4xy+4y^2)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-3xy = 4y^2+4xy \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4y \\ y=-2x \end{array}\right. \quad (*)$$

Thành quả đã có chút ít, thế nhưng thay vào phương trình (2) vẫn khá phức tạp. Hẳn nó phải rút gọn được.
Phương trình (2) tương đương

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x\sqrt{x\,(y+3)}+x\,(y+3)+2\,(x+y+3)} = \sqrt{x}+\sqrt{y+3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\sqrt{x\,(y+3)}\right)^2+2\,(x+y+3)} = \sqrt{x}+\sqrt{y+3} \geq \sqrt{2\,(x+y+3)}$$

$$\Leftrightarrow x+y+3+2\sqrt{x\,(y+3)} \geq 2\,(x+y+3) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y+3}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = y+3 \quad (**)$$

Kết hợp (*) với (**) dễ dàng ra nghiệm $y=1, x=4$ là thỏa.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (4;1)$□

Câu 302 $\begin{cases} x+2y+2\sqrt{4x+y} = 1 \\ 2(x+3) = \sqrt{46-2y(3+8x+8y)} \end{cases}$

Giải

Điều kiện $4x+y \geq 0, y(3+8x+8y) \leq 23$
Phương trình (2) tương đương

$$\Leftrightarrow 4x^2+24x+36 = 46-6y-16y(x+y)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+16xy+16y^2+24x+6y = 10$$

$$\Leftrightarrow 4(x+2y)^2+6(4x+y) = 10$$

Đến đây đặt $x+2y=a, \sqrt{4x+y=b} \geq 0$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 4a^2+6b^2=10 \\ a+2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-1 \\ 4x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{7} \\ y=-\dfrac{5}{7} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{3}{7};-\dfrac{5}{7}\right)$ $\square$

Câu 303 $\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2\right)\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right)=8x^2y^3 \\ x^2y-x+2=0 \end{cases}$

Giải

Hệ này gồm một phương trình khá phức tạp và một phương trình lại khá gọn nhẹ. Để ý chút $\sqrt{4y^2+1}+1$ liên hợp sẽ có $4y^2$ rút gọn được với bên phải. Phần dưới mẫu ta nhân chéo lên đồng thời thử thế con số $2=x-x^2y$ lên (1) xem. Bởi vì nó hiện khá bí ẩn ở phương trình (1). Như vậy ta sẽ có phương trình (1) là

$$\left(\sqrt{x^2+1}-3x^2y+x-x^2y\right).4y^2=8x^2y^3\left(\sqrt{4y^2+1}-1\right)$$

TH1 : $y=0$ không là nghiệm.
TH2 : Do $x=0$ không là nghiệm nên ta có biến đổi sau

$$\sqrt{x^2+1}+x-4x^2y=2x^2y\left(\sqrt{4y^2+1}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x=2x^2y\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=2y+2y\sqrt{4y^2+1} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2x}$$

Thay trở lại (2) ta được

$$\frac{x}{2}-x+2=0 \Leftrightarrow x=4, y=\frac{1}{8}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(4;\dfrac{1}{8}\right)$ $\square$

Câu 304 $\begin{cases} \dfrac{xy^2.\sqrt{1-x^2-y^2}+x}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{x^2y.\sqrt{1-x^2-y^2}-y}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $0<x^2+y^2\leq 1$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{x\left(y^2\sqrt{1-x^2-y^2}+1\right)}{x^2+y^2} = \dfrac{3}{5} & \Rightarrow x > 0 \\ \dfrac{y\left(x^2\sqrt{1-x^2-y^2}-1\right)}{x^2+y^2} = \dfrac{4}{5} & \Rightarrow y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2y^2\sqrt{1-x^2-y^2}+x^2}{x^2+y^2} = \dfrac{3x}{5} & (3) \\ \dfrac{x^2y^2\sqrt{1-x^2-y^2}-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{4y}{5} & (4) \end{cases}$$

Lấy $(3)-(4) \Leftrightarrow \dfrac{3x}{5} - \dfrac{4y}{5} = 1$

Mà ta lại có

$$\frac{3x}{5} - \frac{4y}{5} \le \sqrt{\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2\right](x^2+y^2)} \le 1$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ y = -\dfrac{4}{3}x \\ x > 0, y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = -\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\dfrac{3}{5}; -\dfrac{4}{5}\right)$ □

Câu 305 $\begin{cases} x+y = \sqrt[3]{24} \\ (\sqrt{x}+\sqrt{y})\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}} + \dfrac{1}{\sqrt{y+3x}}\right) = 2 \end{cases}$

Giải

Nhận xét một chút hệ này. Phương trình (2) là dạng thuần nhất rồi. Phương trình (1) cho số xấu thế kia có lẽ chả làm ăn được gì. Ở phương trình (2) biểu thức vế trái khá đối xứng. Mà $x = y$ lại thỏa mãn. Vậy có lẽ dùng bất đẳng thức.

Ta có

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{x+y}{x+3y}\right) \qquad \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2y}{x+3y}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{3}{2}\right)$$

Tương tự ta có

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{3x+y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y} + \frac{3}{2}\right)$$

Cộng 2 bất đẳng thức lại thì ta có $VT \le 2$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \dfrac{\sqrt[3]{24}}{2}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{24}}{2}; \dfrac{\sqrt[3]{24}}{2}\right)$ □

Câu 306 $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{35}{12} \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{7}{12} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $-1<x<1,-1<y<1$
Lấy (1) + (2) và (1) − (2) ta có

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}}=\dfrac{7}{2} \\ \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}=\dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=a,\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}=b \qquad a,b>0$ ta có

$$\begin{cases} a+\dfrac{1}{b}=\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{a}+b=\dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3,b=2 \\ a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=3 \\ \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right),\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{2}\right)$ $\square$

Câu 307 $\begin{cases} (5-x)(1+x^4y^4)=(1+x^2y^2)^3 \\ x^2y^2+x^2+x+y^2=4 \end{cases}$

Giải

Đây là bài toán tôi sáng tác ra. Thực ra cũng chả khó lắm nếu để ý một chút.
Phương trình (2) tương đương

$$x^2y^2+x^2+y^2+1=5-x \Leftrightarrow 5-x=(x^2+1)(y^2+1)$$

Thay lên (1) ta được

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+x^4y^4)=\left(1+x^2y^2\right)^3$$

Đến đây ta sử dụng một bất đẳng thức quen thuộc.
Với $a,b,c>0$ ta luôn có bất đẳng thức

$$(1+a)(1+b)(1+c)\geq\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$$

Áp dụng vào bài trên ta có

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+x^4y^4) \geq \left(1+\sqrt[3]{x^6y^6}\right)^3 = \left(1+x^2y^2\right)^3$$

Đẳng thức xảy ra khi $x^2 = y^2 = x^4y^4 \Leftrightarrow x = \pm 1, y = \pm 1$. Khi thay lại xuống (2) chỉ có $x = 1$ là thỏa.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1), (1; -1)\square$

Câu 308 $\begin{cases} \sqrt{x^3+y^6}\left(2+\dfrac{x^4}{x^3+5y^6}\right) = \dfrac{22x^2}{5} \\ \dfrac{2y^3}{x^4} - \dfrac{y^3}{x^3+5y^6} = \dfrac{9}{10x^2} \end{cases}$

Giải

Đây là một bài khá khó chơi bởi hình thức cồng kềnh của nó đã che giấu đi ý tưởng của bài toán. Một lần tình cờ xem lại câu VM0 95-96. Tôi vô tình đã phát hiện ra sự tương đồng giữa nó và bài này, từ đó đã giải thành công nó. Hiển nhiên bài này ở level cao hơn.
Điều kiện : $x^3 + y^6 \geq 0, x \neq 0, x^3 + 5y^6 \neq 0$
Ta chia phương trình (2) cho $\dfrac{y^3}{x^4}$ và lập một hệ mới sau đây

$$\begin{cases} 2+\dfrac{x^4}{x^3+5y^6} = \dfrac{22x^2}{5\sqrt{x^3+y^6}} \\ 2-\dfrac{x^4}{x^3+5y^6} = \dfrac{9x^2}{10y^3} \end{cases}$$

Đến đây hẳn cũng có người nhận ra ý tưởng quen thuộc của VMO. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{11x^2}{5\sqrt{x^3+y^6}} + \dfrac{9x^2}{20y^3} \\ \dfrac{x^4}{x^3+5y^6} = \dfrac{11x^2}{5\sqrt{x^3+y^6}} - \dfrac{9x^2}{20y^3} \end{cases}$$

Nhân 2 phương trình vế với vế và ta suy ra

$$\frac{2x^4}{x^3+5y^6} = \frac{121x^4}{25\left(x^3+y^6\right)} - \frac{81x^4}{400y^6}$$

Hiển nhiên rút gọn được $x^4 \neq 0$. Còn lại một phương trình thuần nhất giữa 2 biến x^3 và y^6. Như vậy ta nên chia cả 2 vế cho $x^3 \neq 0$. Phương trình trở thành

$$\frac{2}{1+5t} = \frac{121}{25(1+t)} - \frac{81}{400t} \qquad \left(t = \frac{y^6}{x^3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{15} \\ t = -\dfrac{81}{565} \end{array}\right.$$

Nghiệm t thứ hai loại do điều kiện căn thức. Từ đó suy ra $y^6 = \dfrac{x^3}{15}$ thay lên (1) ta được

$$\sqrt{x^3 + \frac{x^3}{15}}\left(2 + \frac{x^4}{x^3 + \dfrac{x^3}{3}}\right) = \frac{22x^2}{5} \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{15}}\left(2 + \frac{3x}{4}\right) = \frac{22x}{5}$$

Phương trình này không khó. Bình phương giải bậc 3 thôi. Ta sẽ giải ra

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{15} \to y = \pm\sqrt[6]{\dfrac{64}{50625}} \\ x = \dfrac{80}{3} \to y = \pm\sqrt[6]{\dfrac{102400}{81}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{4}{15}; \pm\sqrt[6]{\dfrac{64}{50625}}\right), \left(\dfrac{80}{3}; \pm\sqrt[6]{\dfrac{102400}{81}}\right)$ $\square$

Câu 309 $\begin{cases} (x+y)^2 + \dfrac{2y}{x} + \dfrac{1}{x^2} + 2y = 5 + 4x \\ x^2 + x\left(y - \sqrt{2x-y}\right) = 2x - 1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \neq 0, 2x - y \geq 0$.
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} (x+y)^2 + \dfrac{2(x+y)}{x} + \dfrac{1}{x^2} - 2(2x-y) = 7 \\ x + y - \sqrt{2x-y} = 2 - \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + y + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2(2x-y) = 7 \\ x + y + \dfrac{1}{x} - \sqrt{2x-y} = 2 \end{cases}$$

Đặt $x + y + \dfrac{1}{x} = a, \sqrt{2x-y} = b \geq 0$. Ta có

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ a^2 - 2b^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, b = 1 \\ a = 5, b = 3 \end{cases}$$

TH1 : $a = 3, b = 1$ ta có

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3}, y = -\dfrac{1}{3} \\ x = 1, y = 1 \end{array}\right.$$

TH2 : $a = 5, b = 3$ ta có

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} = 5 \\ 2x - y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7-\sqrt{46}}{3}, y = -\dfrac{13+2\sqrt{46}}{3} \\ x = \dfrac{7+\sqrt{46}}{3}, y = \dfrac{2\sqrt{46}-13}{3} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm :
$(x;y)=(1;1),\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right),\left(\frac{7-\sqrt{46}}{3};-\frac{13+2\sqrt{46}}{3}\right),\left(\frac{7+\sqrt{46}}{3};\frac{2\sqrt{46}-13}{3}\right)$ □

Câu 310 $\begin{cases} 2x^3+3x^2\sqrt{y}=5-3x^2 \\ \sqrt{y}(y+12x+3)+3y(1+2x)=6(1-x) \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y\geq 0$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 8x^3+12x^2\left(\sqrt{y}+1\right)=20 \\ \left(\sqrt{y}+1\right)^3+6x\left(\sqrt{y}+1\right)^2=7 \end{cases} \Rightarrow (2x+\sqrt{y}+1)^3=27\Leftrightarrow\sqrt{y}+1=3-2x$$

Thay lên (1) ta được

$$2x^3+3x^2(3-2x)=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{8}\left(5\pm\sqrt{105}\right) \end{array}\right.$$

Tuy nhiên ở phép rút $\sqrt{y}=2-2x$ thì $x\leq 1$. Vậy ta loại bớt $x=\frac{1}{8}\left(5+\sqrt{105}\right)$.
Với $x=1\Rightarrow y=0$
Với $x=\frac{1}{8}\left(5-\sqrt{105}\right)\Rightarrow y=\frac{3}{8}\left(19+\sqrt{105}\right)$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;0),\left(\frac{1}{8}\left(5-\sqrt{105}\right);\frac{3}{8}\left(19+\sqrt{105}\right)\right)$ □

Câu 311 $\begin{cases} \left(x-\frac{1}{x}\right)^2+x\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y}\right)=0 \\ 3x^2+\frac{1}{y^2}=4 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^2+\frac{2}{x^2}+\frac{x}{y}=2 \\ 3x^2+\frac{1}{y^2}=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^2+\frac{4}{x^2}+\frac{2x}{y}=4 \\ 3x^2+\frac{1}{y^2}=4 \end{cases}$$

Trừ vế với vế 2 phương trình trên ta có

$$\left(x-\frac{1}{y}\right)^2=\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} \frac{1}{y}=x-\frac{2}{x} & (3) \\ \frac{1}{y}=x+\frac{2}{x} & (4) \end{array}\right.$$

Thay (3) vào (2) ta được

$$3x^2 + \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$$

Thay (4) vào (2) ta được

$$3x^2 + \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = 4 \quad (VN)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; -1), (-1; 1)\square$

Câu 312 $\begin{cases} (4x^2 + y)\sqrt{x^2 + y} + 3x^2(x - 1) = 3x(1 - y) + 1 \\ \left(\sqrt{\dfrac{y}{1 - x}} + 1\right)^2 = \sqrt[3]{x(1 - y) + 2} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \neq 1, \dfrac{y}{1 - x} \geq 0, x(1 - y) \geq -2, x^2 + y \geq 0$

Phương trình (1) tương đương

$$(x^2 + y)\sqrt{x^2 + y} + 3x^2\sqrt{x^2 + y} + 3x(x^2 + y) + x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + y} + x\right)^3 = (x + 1)^3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y} = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x^2$$

Thay vào (2) ta được

$$\left(\sqrt{1 + x} + 1\right)^2 = \sqrt[3]{x^3 + 2} \Leftrightarrow x + 2 + 2\sqrt{x + 1} = \sqrt[3]{x^3 + 2} \geq x + 2$$

$$\Leftrightarrow 6(x + 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (-1; 0)\square$

Câu 313 $\begin{cases} \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \dfrac{1}{y^2}} = 2\sqrt{7} \\ \dfrac{6}{x + y} + \dfrac{1}{xy} = 1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x, y \neq 0$

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \dfrac{1}{y^2}} = 2\sqrt{7} \\ 6 + \dfrac{x + y}{xy} = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2} + \sqrt{\left(y - \dfrac{1}{y}\right)^2 + 2} = 2\sqrt{7} \\ \left(x - \dfrac{1}{x}\right) + \left(y - \dfrac{1}{y}\right) = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ \sqrt{a^2+2}+\sqrt{b^2+2}=2\sqrt{7} \end{cases} \quad (VN)$$

Vậy hệ đã cho vô nghiệm $\square$

Câu 314 $\begin{cases} \sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{5y^2+2xy+2x^2}=3(x+y) \\ \sqrt{2x+y+1}+2.\sqrt[3]{7x+12y+8}=2xy+y+5 \end{cases}$

Giải

Nhận thấy ngay sự thuần nhất của phương trình (1) và dễ thấy $x=y$ thì phương trình (1) đúng, vậy ta tiến hành tách cho phù hợp. Ta có

$$VT=\sqrt{(x-y)^2+(2x+y)^2}+\sqrt{(x-y)^2+(2y+x)^2}\geq|2x+y|+|2y+x|\geq 3(x+y)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y\geq 0$. Thay vào phương trình (2) ta được

$$\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{19x+8}=2x^2+x+5$$

Ta tìm được 2 nghiệm là $0,1$. Từ đó có hướng thêm bớt lượng liên hợp cho tốt. Phương trình tương đương

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1}-(x+1)\right)+2\left(\sqrt[3]{19x+8}-(x+2)\right)=2x^2-2x$$

$$\Leftrightarrow (x-x^2)\left[\frac{1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+2.\frac{x+7}{\sqrt[3]{(19x+8)^2}+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+(x+2)^2}+2\right]=0$$

Hiển nhiên em trong ngoặc luôn dương do điều kiện của (1).
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(0;0),(1;1)\square$

Câu 315 $\begin{cases} 5x^2+6x+3xy+y+5=0 \\ 9x^3+21x^2+27x+2y^3+7=0 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 4(x+1)^2+(x-1)^2+y(3x+1)=0 \\ 8(x+1)^3+(x-1)^3+2y^3=0 \end{cases}$$

Đặt $2(x+1)=a, x-1=b$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a^2+b^2+y(a+b)=0 \\ a^3+b^3+2y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab+y(a+b)=0 \quad (*) \\ (a+b)^3-3ab(a+b)+2y^3=0 \quad (**) \end{cases}$$

Thế ab từ (*) xuống (**) ta được

$$-\frac{1}{2}(a+b)^3-\frac{3}{2}(a+b)^2y+2y^3=0 \quad (***)$$

Dễ dàng nhận ra đây là một phương trình thuần nhất. *Set* $\dfrac{a+b}{y}=t \quad (y\neq 0)$. Khi đó (***) tương đương

$$-\frac{1}{2}t^3-\frac{3}{2}t^2+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \Leftrightarrow y=a+b=3x+1 \\ t=-2 \Leftrightarrow -2y=3x+1 \end{array}\right.$$

Thay từng trường hợp vào (1) và ta dễ dàng tìm ra nghiệm.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(-3;4)\square$

Câu 316 $\begin{cases} x^2-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{7x}{2y} \\ y^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{7y}{2x} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x,y\neq 0$ Hình thức hệ là đối xứng. Tuy nhiên với hình thức như thế này trừ (2) phương trình cho nhau là không nên. Ta sẽ biến đổi khéo léo như sau. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \left(x+\dfrac{y}{x}\right)^2=\dfrac{7}{2}\left(\dfrac{x}{y}+y\right) \\ \left(y+\dfrac{x}{y}\right)^2=\dfrac{7}{2}\left(x+\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Đặt $x+\dfrac{y}{x}=a, y+\dfrac{x}{y}=b$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a^2=\dfrac{7}{2}b \\ b^2=\dfrac{7}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=0 \\ a=b=\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

TH1 :

$$\begin{cases} x+\dfrac{y}{x}=0 \\ y+\dfrac{x}{y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-1$$

TH2 :

$$\begin{cases} x+\dfrac{y}{x}=\dfrac{7}{2} \\ y+\dfrac{x}{y}=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, y=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{5}{2}, y=\dfrac{5}{2} \\ x=\dfrac{3}{2}, y=3 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(-1;-1),\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right),\left(3;\dfrac{3}{2}\right),\left(\dfrac{3}{2};3\right)\square$

Câu 317 $\begin{cases} 4+\sqrt{x+y-1}=\sqrt{x+1}+\sqrt{3y+6} \\ \sqrt{x^3+x^2+4x+4}=8-\sqrt{x^2+4}.\sqrt{3y+6} \end{cases}$

Giải

Phương trình (2) tương đương

$$\sqrt{x^2+4}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3y+6}\right)=8$$

Mà theo (1) ta có

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{3y+6}\geq 4 \quad ,\sqrt{x^2+4}\geq 2$$

Vậy $VT\geq 8$
Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} x=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(0;1)\square$

Câu 318 $\begin{cases} 2\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2=\sqrt[3]{x^2+4y+16} \\ x^2+\dfrac{4y}{x}=2(9x-1)\sqrt{2x^3-y} \end{cases}$

Giải

Đây là một loại hệ cũng khá khó chịu nếu không thật tinh ý nhận ra.
Điều kiện : $2x^3-y\geq 0, -1\leq x\neq 0$
Phương trình thứ 2 tương đương

$$x^3+4y=2x(9x-1)\sqrt{2x^3-y}$$

Đặt $t=\sqrt{2x^3-y}\geq 0\Rightarrow y=2x^3-t^2$ thay vào phương trình trên ta có

$$x^3+4(2x^3-t^2)=(18x^2-2x)t\Leftrightarrow 9x^3-18x^2t+2xt-4t^2=0$$

$$\Leftrightarrow (9x^2+2t)(x-2t)=0\Leftrightarrow x=2t\geq 0\Leftrightarrow 4y=8x^3-x^2$$

Thay vào (1) và ta có

$$\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2=\sqrt[3]{x^3+2}$$

Phương trình này tôi đã giải ở câu 312. Ra $x=-1 \quad (L)$
Vậy hệ đã cho vô nghiệm $\square$

Tôi sẽ giới thiệu thêm cho bạn đọc một câu hình thức khá tương tự.

Câu 319 $\begin{cases} \sqrt{x^3-y} = \dfrac{2y}{x(4x-1)} \\ \sqrt[3]{2x^2+8y} = \dfrac{7-4y}{x(x+1)} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x^3 \geq y, x \neq -1, 0, \dfrac{1}{4}$
Phương trình thứ nhất tương đương

$$(4x^2-2x)\sqrt{x^3-y} = 2y$$

Đặt $\sqrt{x^3-y} = t \geq 0 \Rightarrow y = x^3 - t^2$ thay lại vào ta có

$$(4x^2-x)t = 2(x^3-t^2) \Leftrightarrow 2x^3 - 4x^2t + xt - 2t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2t)(2x^2+t) = 0 \Leftrightarrow x = 2t \geq 0 \Leftrightarrow 4y = 4x^3 - x^2$$

Thay xuống (2) ta được

$$\sqrt[3]{8x^3} = \frac{7-4x^3+x^2}{x(x+1)} \Leftrightarrow 2x^2(x+1) = 7 - 4x^3 + x^2 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{4}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(1; \dfrac{3}{4}\right)$ $\square$

Câu 320 $\begin{cases} 5(x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{(x^2-y^2)^2}\right) + 2xy\left(1-\dfrac{1}{(x^2-y^2)^2}\right) = 35 \\ \dfrac{3x-y}{x^2-y^2} + 3x + y = 9 \end{cases}$

Giải

Đây là bài toán tôi sáng tác. Hình thức có vẻ hơi cồng kềnh. Muốn giải được bài này cần kĩ năng biến đổi tương đối tốt.
Điều kiện : $x^2 \geq y^2$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 5(x^2+y^2) + 2xy + \dfrac{5(x^2+y^2)-2xy}{(x-y)^2(x+y)^2} = 35 \\ \dfrac{2(x-y)+x+y}{(x-y)(x+y)} + 2(x+y) + x - y = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 + 2(x-y)^2 + \dfrac{3(x-y)^2+2(x+y)^2}{(x-y)^2(x+y)^2} = 35 \\ 2\left[x+y+\dfrac{1}{x+y}\right] + \left[x-y+\dfrac{1}{x-y}\right] = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left[(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]+2\left[(x-y)^2+\dfrac{1}{(x-y)^2}\right]=35 \\ 2\left[x+y+\dfrac{1}{x+y}\right]+\left[x-y+\dfrac{1}{x-y}\right]=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left[x+y+\dfrac{1}{x+y}\right]^2+2\left[x-y+\dfrac{1}{x-y}\right]^2=45 \\ 2\left[x+y+\dfrac{1}{x+y}\right]+\left[x-y+\dfrac{1}{x-y}\right]=9 \end{cases}$$

Đặt $a=x+y+\dfrac{1}{x+y}, b=x-y+\dfrac{1}{x-y}, \quad |a|,|b|\geq 2$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 3a^2+2b^2=45 \\ 2a+b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3, b=3 \\ a=\dfrac{39}{11}, b=\dfrac{21}{11} \quad (L) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x+y}=3 \\ x-y+\dfrac{1}{x-y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x+y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x-y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

Như vậy sẽ xảy ra 4 trường hợp. Với mỗi trường hợp sẽ ra một nghiệm. Xin nhường lại cho bạn đọc.

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};0\right),\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};0\right)$ $\square$

Câu 321 $\begin{cases} \sqrt{7x+y}-\sqrt{2x+y}=4 \\ 2\sqrt{2x+y}-\sqrt{5x+8}=2 \end{cases}$

Giải

Hình thức bài hệ khá giống câu 87, tức là câu VMO 2000-2001. Tuy nhiên, bài này ở level cao hơn.

Điều kiện : $y\leq min\{-2x,-7x\}, x\geq -\dfrac{8}{5}$

Phương trình thứ nhất tương đương

$$\sqrt{7x+y}=4+\sqrt{2x+y}$$

$$\Leftrightarrow 7x+y=2x+y+8\sqrt{2x+y}+16$$

$$\Leftrightarrow 5x+8=8\sqrt{2x+y}+24$$

Đến đây kết hợp với (2) ta đặt $\sqrt{2x+y}=a\geq 0, \sqrt{5x+8}=b\geq 0$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases}2a-b=2\\ b^2=8a+24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=5\\ b=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=25\\ 5x+8=64\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{56}{5}\\ y=\dfrac{13}{5}\end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{56}{5};\dfrac{13}{5}\right)$ $\square$

Câu 322 $\begin{cases}(x+y)(3xy-4\sqrt{x})=-2\\ (x+y)(3xy+4\sqrt{y})=2\end{cases}$

Giải

Đối với loại hệ "suýt soát" đối xứng thế này. Ta thường cộng hoặc trừ hai phương trình cho nhau.
Điều kiện : $x,y\geq 0$
Lấy $(1)+(2)$ và $(1)-(2)$ ta được hệ mới

$$\begin{cases}(x+y)(3xy-2\sqrt{x}+2\sqrt{y})=0\\ (x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3xy=2(\sqrt{x}-\sqrt{y}) & (*)\\ 1=(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})\end{cases}$$

Đến đây tinh ý ta hoàn toàn đưa nó về thuần nhất được. Nhận vế với vế ta được

$$3xy=2(x+y)(x-y)\Leftrightarrow (x-2y)(2x+y)=0\Leftrightarrow x=2y$$

Thay lên $(*)$ ta được

$$6y^2=2\sqrt{y}\left(\sqrt{2}-1\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}y=0 & (L)\\ 3\left(\sqrt{y}\right)^3=\sqrt{2}-1\end{array}\right. \Leftrightarrow y=\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(2\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^2};\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^2}\right)$ $\square$

Câu 323 $\begin{cases}4\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}}+5y=\left(\sqrt{y}+2\sqrt{y+1}\right)^2\\ 4\sqrt{1+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{(y+1)^2}}+5x=\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y+1}\right)^2\end{cases}$

Giải

Hình thức bài hệ rã ràng là đối xứng. Tuy nhiên với hình thức như thế này các phương pháp thông thường khó có thể chơi được. Tuy nhiên nếu ai chú ý thì đẳng thức trong căn thức khá quen thuộc.

Điều kiện : $x, y > 0$
Trước hết ta biến đổi biểu thức trong căn đã

$$1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x+1)^2 + (x+1)^2 + x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{x^2(x+1)^2 + 2x(x+1) + 1}{x^2(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x(x+1)+1)}{x^2(x+1)^2} = \left(1 + \frac{1}{x(x+1)}\right)^2$$

Vậy hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 4\left(1 + \dfrac{1}{x(x+1)}\right) + 5y = 5y + 4 + 4\sqrt{y(y+1)} \\ 4\left(1 + \dfrac{1}{y(y+1)}\right) + 5x = 5x + 4 + 4\sqrt{x(x+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)} = \sqrt{y(y+1)} \\ \dfrac{1}{y(y+1)} = \sqrt{x(x+1)} \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{x(x+1)} = a, \sqrt{y(y+1)} = b, \quad a, b > 0$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{b^2} \\ b = \dfrac{1}{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = 1 \\ y(y+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ □

Câu 324 $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{11}{3} - \dfrac{2y^2}{3}} + \sqrt{1+2x} = y^4 - 10x^2 - 24x - 14 \\ 2y\sqrt{3x+4}(2x+3) = 2xy^2 + 3y^2 + 6x^2 + 17x + 12 \end{cases}$

Giải

Với hình thức bài hệ thế này, gần như phương trình (1) chả làm ăn được gì. Ta sẽ khai thác từ phương trình (2).
Điều kiện $x \geq -\dfrac{1}{2}, y^2 \leq \dfrac{11}{2}$
Phương trình (2) tương đương

$$2y\sqrt{3x+4}(2x+3) = y^2(2x+3) + (2x+3)(3x+4) \Leftrightarrow (2x+3)(y - \sqrt{3x+4})^2 = 0$$

Đến đây rút ra $y^2 = 3x + 4$ thay vào phương trình (1) ta có

$$\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = 2 - x^2$$
$$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1-4x^4} = x^4 - 4x^2 + 4$$
$$\Leftrightarrow x^4(x^4 - 8x^2 + 20) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (0; 2)$□

Câu 325 $\begin{cases} 1+\sqrt[4]{\sqrt{xy^9}-y^4}=y(1-x) \\ \sqrt[4]{x^2y^3}+\sqrt[4]{xy-y+1}=\sqrt[4]{y} \end{cases}$

Giải

Tác giả bài toán là một người bạn của tôi trên facebook : Hạ Lan Tâm Như - Lớp 12C1 THPT Đặng Thúc Hứa, Thanh Chương, Nghệ An.
Với hình thức hệ như này có lẽ chỉ có đánh giá mới diệt được
Hệ này có nhiều điều kiện, trong đó có một điều kiện đó là $y-xy\leq 1$.
Từ phương trình (1) ta có

$$y-xy=1+\sqrt[4]{\sqrt{xy^9}-y^4}\geq 1$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} y-xy=1 \\ \sqrt{xy^9}-y^4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=2 \end{cases} \qquad (TM)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};1\right)\square$

Câu 326 $\begin{cases} (2x+y-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)=8\sqrt{x} \\ \left(\sqrt{x+3}+\sqrt{xy}\right)^2+xy=2x(6-x) \end{cases}$

Giải

Nhận xét $x=0$ không là nghiệm. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} (2x+y-1)\left(\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}+1\right)=8 \\ \left(\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}\right)^2+y=2(6-x) \end{cases}$$

Đặt $2x+y=a$, $\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}=b>0$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} (a-1)(b+1)=8 \\ a=12-b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1)\square$

Câu 327 $\begin{cases} 4x^2-3y=0 \\ (2x^2+y)[4x^4-3x^2+y(4x^2+y+6)]=8 \end{cases}$

Giải

Bài này tất nhiên có thể giải bằng cách rút y từ (1) xuống (2) tạo phương trình ẩn x^2 có thể giải được. Tuy nhiên nếu biến đổi tinh tế một chút thì bài toán sẽ đẹp hơn như sau.

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x^2+y+2(x^2-2y)=2 \\ (2x^2+y)\left[(2x^2+y)^2-3(x^2-2y)\right]=8 \end{cases}$$

Đặt $2x^2+y=a, x^2-2y=b$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} a+2b=2 \\ a(a^2-3b)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+y=2 \\ x^2-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{4}{5}} \\ y=\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\sqrt{\dfrac{4}{5}};\dfrac{2}{5}\right),\left(-\sqrt{\dfrac{4}{5}};\dfrac{2}{5}\right)$ $\square$

Câu 328 $\begin{cases} x+\sqrt{x+2y}=y^2+y+2 \\ y^2+3xy+x+y-10=0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x+2y\geq 0$
Phương trình thứ nhất tương đương

$$x+2y+\sqrt{x+2y}-y^2-3y-2=0$$

Ta có : $\Delta_{\sqrt{x+2y}}=1+4(y^2+3y+2)=(2y+3)^2$

Quá tuyệt vời khi nó chính phương. Từ đó ta có $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2y}=y+1 \\ \sqrt{x+2y}=-y-2 \end{array}\right.$

TH1 : $\sqrt{x+2y}=y+1\Rightarrow x=y^2+1$ thay vào (2) ta có

$$4y^3+y^2+4y-9=0\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=2$$

TH2 : $\sqrt{x+2y}=-y-2\Rightarrow x=y^2+2y+4$ thay vào (2) ta có

$$3y^3+8y^2+15y-6=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{3} \qquad (L)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(2;1)$ $\square$

Câu 329 $\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0 \\ \sqrt{x^3+xy+6y}-\sqrt{y^3+x^2-1}=2 \end{cases}$

Giải

Phương trình (2) khó có thể làm ăn được gì. Nhìn thấy phương trình thứ nhất đang là tam thức nên thử khai thác nó xem.
Phương trình (1) viết lại như sau

$$10x^2 - 2x(y+19) + 5y^2 - 6y + 41 = 0$$

Ta có : $\Delta'_x = -49(y-1)^2$.
Giả sử hệ này có nghiệm thì suy ra $y = 1$. Thay lên (1) ta có

$$10x^2 - 40x + 40 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Thay vào phương trình (2) thấy thỏa mãn.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (2; 1)\square$

Câu 330 $\begin{cases} 3x^2 + 4x - 5 = \sqrt{-y^2 - 6y - 1} \\ x + 1 = \sqrt{17 - 4y - 16x} \end{cases}$

Giải

Với kiểu hệ khó chịu thế này có lẽ đánh giá sẽ là đòn đánh tốt nhất.
Từ phương trình thứ nhất ta có

$$3x^2 + 4x - 5 = \sqrt{-y^2 - 6y - 1} \le \frac{1 - y^2 - 6y - 1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 6x^2 + 8x - 10 + y^2 + 6y \le 0 \qquad (*)$$

Từ phương trình thứ hai ta lại có

$$x + 1 = \sqrt{17 - 4y + 16x} \Rightarrow x^2 + 18x + 4y - 16 = 0 \qquad (**)$$

Lấy $(*) - (**)$ ta được

$$5(x-1)^2 + (y+1)^2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Thay lại hệ thấy không thỏa mãn.
Vậy hệ đã cho vô nghiệm $\square$

2.12 Câu 331 đến câu 360

Câu 331 $\begin{cases} 12x^3 + 12x^2 + 367x - 54y^3 - 54y^2 - 18y = -144 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$

Giải

Nhận xét phương trình (2) là tam thức, phương trình (1) là hai hàm riêng biệt của ẩn. Chắc nhận ra loại này rồi chứ ? Mời bạn đọc xem lại từ câu 77.
Ta viết lại phương trình thứ hai như sau

$$\begin{cases} x^2 + x(y-7) + y^2 - 6y + 14 = 0 \\ y^2 + y(x-6) + x^2 - 7x + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_y \ge 0 \\ \Delta_x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le y \le \dfrac{7}{3} \\ 2 \le x \le \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

Giờ quay lên xét phương trình thứ nhất. Nó có dạng

$$f(x) - g(y) = -144$$

Với $f(x) = 12x^3 + 12x^2 + 367x$ đơn điệu tăng, và $g(y) = 54y^3 + 54y^2 + 18y$ đơn điệu tăng. Từ đó ta có

$$f(x) \geq f(2) = 878, \quad g(y) \leq g\left(\frac{7}{3}\right) = 1022$$

$$\Rightarrow f(x) - g(y) \geq 878 - 1022 = -144$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{7}{3} \end{cases}$. Thay lại vào phương trình (2) thấy thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(2; \dfrac{7}{3}\right)$ $\square$

Câu 332 $\begin{cases} x^3 - y^3 + \dfrac{5}{3}(x+y)^2 - 5x^2 - \dfrac{8}{3}xy + 13x = \dfrac{100}{3} \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$

Giải

Dạng rất giống câu trên, tuy nhiên ở phương trình đầu các biến x, y không hoàn toàn rời nhau nữa mà bị ràng buộc bởi xy. Vậy có cách nào dứt được bọn này ra không ? Xin thưa là có. Thật khéo léo ta thế xy từ (2) lên (1) là ta sẽ tách hoàn toàn được x, y. Như vậy thế xy từ (2) lên (1) và ta dựng một hệ mới sau đây

$$\begin{cases} 3x^3 + 18x^2 + 45x + 2y^2 - 3y^3 + 8y = 108 \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

Đến đây quá quen thuộc ngay trên rồi. Xin nhường lại cho bạn đọc giải nốt. Bài này lâu hơn bài trên ở chỗ ta phải lập bảng biến thiên hàm $g(y)$ vì nó không đơn điệu.

Hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$ $\square$

Câu 333 $\begin{cases} \dfrac{y(xy-1)}{y^2+1} = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{x(xy-1)}{x^2+1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Giải

Dựa vào phương trình ta thấy để có nghiệm thì $xy(xy-1) \neq 0$.
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{x-\dfrac{1}{y}}{1+\dfrac{1}{y^2}} = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{y-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Đặt $\dfrac{1}{x} = a, \dfrac{1}{y} = b$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} \dfrac{1-ab}{a(b^2+1)} = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1-ab}{b(a^2+1)} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a(b^2+1)}{1-ab} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{b(a^2+1)}{1-ab} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Trừ 2 phương trình trên cho nhau ta được

$$a-b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}+b$$

Thay lại và ta dễ dàng tìm được

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 2)\square$

Câu 334 $\begin{cases} x+y = 4xy \\ (2x+3)\sqrt{4x-1}+(2y+3)\sqrt{4y-1} = 2\sqrt{(2x+3)(2y+3)} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq \dfrac{1}{4}; y \geq \dfrac{1}{4}$
Chú ý đẳng thức sau

$$x+y = kxy \Leftrightarrow (kx-1)(ky-1) = 1$$

Áp dụng vào phương trình (1) ta có : $(4x-1)(4y-1) = 1$
Áp dụng $AM-GM$ vào phương trình (2) ta có

$$(2x+3)\sqrt{4x-1}+(2y+3)\sqrt{4y-1} \geq 2\sqrt{(2x+3)(2y+3)\sqrt{(4x-1)(4y-1)}} = 2\sqrt{(2x+3)(2y+3)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $(2x+3)\sqrt{4x+1} = (2y+3)\sqrt{4y-1} \Leftrightarrow x = y$
Thay vào phương trình (1) ta có

$$2x = 4x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 2)\square$

Câu 335 $\begin{cases} \sqrt{x+y+1}+1 = 4(x+y)^2+\sqrt{3(x+y)} \\ 2x-y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x+y \geq 0$ Phương trình thứ nhất tương đương

$$4(x+y)^2-1+\sqrt{3(x+y)}-\sqrt{x+y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x+2y+1)(2x+2y-1)+\frac{2x+2y-1}{\sqrt{3(x+y)}+\sqrt{x+y+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow 2x+2y=1$$

Kết hợp phương trình (2) quá dễ dàng.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{6}\right)$ $\square$

Câu 336 $\begin{cases} x^4-3\sqrt{y}=3x+y \\ x\sqrt{y}(y-1)=3(x+\sqrt{y}) \end{cases}$

Giải

Đặt $t=\sqrt{y}\geq 0$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^4-t^2=3x+3t \\ xt^3-xt=3x+3t \end{cases} \Rightarrow x^4-t^2=xt^3-xt \Leftrightarrow (x-t)\left[x(x^2+xt+t^2)+t\right]=0 \qquad (*)$$

Giờ ta tạm thời xét phần khó trước. Kết hợp với (2) ta có hệ mới sau

$$\begin{cases} x(x^2+xt+t^2)+t=0 & (3) \\ xt^3-xt-3x-3t=0 & (4) \end{cases}$$

Ta có

$$x(x^2+xt+t^2)+t=\frac{xt(x^2+xt+t^2)+t^2}{t}=\frac{xt(x^2+xt+t^2)+t^2-(xt^3-xt-3x-3t)}{t}$$

$$=\frac{(x+t)(x^2t+t+3}{t}$$

Vậy (*) có thể viết lại là

$$(x^2-t^2)(x^2t+t+3)=0 \Leftrightarrow x=\pm t \qquad (Dot \geq 0)$$

Đến đây giải ra x,t và trả lại biến y

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(0;0),(-1;1),(2;4)$ $\square$

Câu 337 $\begin{cases} x^3 - 6x^2y = 8y^3 - 6 \\ 4xy^2 + x = 2y + \sqrt{2y - x + 1} + 1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $2y - x + 1 \geq 0$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2y - 8y^3 = -6 \\ 12xy^2 = 3(2y + 1 - x) + 3\sqrt{2y + 1 - x} \end{cases}$$

Cộng 2 phương trình vế với vế ta được

$$-(2y - x)^3 = 3(2y - x) + 3\sqrt{2y - x + 1} - 3$$

Đặt $2y - x = t$ phương trình đã cho tương đương

$$-t^3 = 3t + 3\sqrt{t + 1} - 3 \Leftrightarrow t\left(t^2 + 3 + \frac{3}{\sqrt{t + 1} + 1}\right) = 0$$

Từ đó suy ra $x = 2y$ thay vào phương trình (1) ta có

$$y^3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \sqrt[3]{2}\right)$ $\square$

Câu 338 $\begin{cases} x^4 + 2x^3 - 5x^2 + y^2 - 6x - 11 = 0 \\ x^2 + x = \dfrac{3\sqrt{y^2 - 7} - 6}{\sqrt{y^2 - 7}} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y^2 \geq 7$
Phương trình thứ nhất tương đương

$$(x^2 + x - 6)(x^2 + x) + (y^2 - 7) = 4$$

Vậy đặt $x^2 + x = a$, $\sqrt{y^2 - 7} = b \geq 0$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a(a - 6) + b^2 = 4 \\ a = \dfrac{3b - 6}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, b = 2 \\ a = 1, b = 3 \end{array} \right.$$

TH1 :

$$\begin{cases} x^2 + x = 0 \\ \sqrt{y^2 - 7} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = -1 \\ y = \pm\sqrt{11} \end{cases}$$

TH2 :

$$\begin{cases} x^2+x=1 \\ \sqrt{y^2-7}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \\ y=\pm 4 \end{cases}$$

Từ đó kết luận nghiệm (nhiều cặp quá !)

Câu 339 $\begin{cases} (x^2+1)y^4+1=2xy^2(y^3-1) \\ xy^2(3xy^4-2)=xy^4(x+2y)+1 \end{cases}$

Giải

Lấy (1) − (2) ta được

$$y^4(1-2xy)=xy^5(2-3xy)$$

Vì $y=0$ không là nghiệm. Từ đó suy ra

$$3(xy)^2-4xy+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ xy=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

TH1 : $xy=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{y}$ thay vào (1) ta được

$$y^4=(y+1)^2 \Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

TH2 : $xy=\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=\dfrac{1}{3y}$ thay vào (1) ta được

$$3y^4=-(y+3)^2 \qquad (L)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$ □

Câu 340 $\begin{cases} 2x-y+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-2+2(2x-y)^2} \\ y^2+4x\sqrt{x-1}=17 \end{cases}$

Giải

Bài toán xuất hiện trong đề thi thử của Chuyên Nguyễn Huệ. Một bài toán khá đặc sắc.
Điều kiện $x\geq 1$
Đặt $2x-y=a, \sqrt{x-1}=b$ phương trình (1) tương đương

$$a+b=\sqrt{2(a^2+b^2)} \Leftrightarrow a=b$$

$$\Leftrightarrow 2x-\sqrt{x-1}=y \Leftrightarrow 4x^2+x-1=y^2+4x\sqrt{x-1}$$

Từ đó suy ra

$$4x^2+x-1=17 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=3$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(2;3)$□

Câu 341 $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3x-2 \\ (x^2+xy)^4+(y^2+2)^4=17x^4 \end{cases}$

Giải

Phương trình (2) khá phức tạp khi hằng đẳng thức bậc 4. Tư tưởng vẫn giữ nguyên khi gặp loại này : phân tích nhân tử hoặc đặt ẩn phụ.
Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ.
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2+2=3x \\ (x^2+xy)^4+(y^2+2)^4=17x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+xy}{x}+\dfrac{y^2+2}{x}=3 \\ \left(\dfrac{x^2+xy}{x}\right)^4+\left(\dfrac{y^2+2}{x}\right)^4=17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a^4+b^4=17 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1, b=2 \\ a=2, b=1 \end{array}\right.$$

TH1 :

$$\begin{cases} x^2+xy=x \\ y^2+2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=0 \\ x=3, y=-2 \end{array}\right.$$

TH2 :

$$\begin{cases} x^2+xy=2x \\ y^2+2=x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=0 \\ x=3, y=-1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;0),(3;-2),(2;0),(3;-1)\square$

Câu 342 $\begin{cases} 3x^2-2x-5+2x\sqrt{x^2+1}=2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} \\ x^2+2y^2=2x-4y+3 \end{cases}$

Giải

Trừ 2 phương trình cho nhau vế với vế ta được

$$x^2+x\sqrt{x^2+1}=(y+1)^2+(y+1)\sqrt{(y+1)^2+1}$$

Công việc của ta là xét hàm $f(t)=t^2+t\sqrt{t^2+1}$ và chứng minh nó đơn điệu tăng, xin nhường lại cho bạn đọc.
Từ đó ta có $x=y+1$ thay vào (2) dễ dàng tìm ra nghiệm.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(-1;-2),\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3}\right)\square$

Câu 343 $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{2} \\ 4x(x^3-x^2+x-1)=y^2+2xy-2 \end{cases}$

Giải

Thay $y^2=\dfrac{1}{2}-x^2$ từ (1) xuống (2) ta có

$$4x^4-4x^3+5x^2-4x=2xy-\frac{3}{2} \qquad (*)$$

Ta có $2xy\le x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$. Như vậy (*) suy ra

$$4x^4-4x^3+5x^2-4x+1\le 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2(x^2+1)\le 0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ □

Câu 344 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (3x-4x^3)(3y-4y^3)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Giải

Nhìn tổng quan hệ ta thấy các biểu thức khá giống các công thức lượng giác. Vậy ta đặt $x=cost, y=sint$ với $t\in[-\dfrac{\pi}{2};\pi]$.
Thay vào phương trình (2) ta được

$$\Leftrightarrow 2\sin 3t\cos 3t=1\Leftrightarrow \sin 6t=1\Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{12} \\ t\in[-\dfrac{\pi}{2};\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow k=0,1,2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(cos\dfrac{\pi}{12};sin\dfrac{\pi}{12}\right),\left(cos\dfrac{5\pi}{12};sin\dfrac{5\pi}{12}\right),\left(cos\dfrac{3\pi}{4};sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ □

Câu 345 $\begin{cases} \sqrt{x-y}+\sqrt{x-2}=2 \\ \sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)}+\sqrt{xy-y^2}=2\sqrt{2}(x-y-1) \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} (x-y)\sqrt{x-y} + (x-y)\sqrt{x-2} = 2x-2y \\ \sqrt{2x^2+2y^2-2xy\,(x-y)} + \sqrt{2xy-2y^2} = 4\,(x-y-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-y)^3} + \sqrt{(x-y)^2\,(x-2)} = 2x-2y \\ \sqrt{2x^2+2y^2-2xy\,(x-y)} + \sqrt{2xy-2y^2} = 4\,(x-y-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-y)^3} - \sqrt{2x^2+2y^2-2xy\,(x-y)} + \sqrt{(x-y)^2\,(x-2)} - \sqrt{2xy-2y^2} = 4-2x+2y$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)\left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x-y)^3}+\sqrt{2x^2+2y^2-2xy(x-y)}} + \frac{x^2-xy}{\sqrt{(x-y)^2(x-2)}+\sqrt{2xy-2y^2}} + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y-2=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{x-2} = 2 \Rightarrow x = 8-4\sqrt{2} \Rightarrow y = 6-4\sqrt{2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (8-4\sqrt{2}; 6-4\sqrt{2})\square$

Câu 346 $\begin{cases} x^4 + 8y = 4(x^3-1) - 16\sqrt{3} \\ y^4 + 8x = 4(y^3-1) + 16\sqrt{3} \end{cases}$

Giải

Bài toán này có cùng 1 ý tưởng với 1 bài toán khác tôi đã nêu ở phần giữa cuốn sách Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^4 - 4x^3 + 8y = -4 - 16\sqrt{3} \\ y^4 - 4y^3 + 8x = -4 + 16\sqrt{3} \end{cases}$$

Cộng hai phương trình của hệ, ta được:

$$\left(x^4 - 4x^3 + 8x\right) + \left(y^4 - 4y^3 + 8y\right) = -8$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2x - 2\right)^2 + \left(y^2 - 2y - 2\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{3} \\ y = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Thay lại vào hệ thử.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(1+\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}\right)\square$

Câu 347 $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3 \\ x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=6 \end{cases}$

Giải

Lấy $PT(2)-2PT(1)$ ta được

$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1})(\sqrt{x+1}\sqrt{y+1}-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}\sqrt{y+1}=2 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+1}=1 \\ \sqrt{y+1}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+1}=2 \\ \sqrt{y+1}=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=3 \\ x=3, y=0 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(0;3),(3;0)\square$

Câu 348 $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x^9-18y-27x-29}{3}}-\sqrt{x-y-1}=2x+\sqrt{x^2+x-2} \\ x(x^3+2xy-2x+2)+(y-2)^2+7=6\sqrt[3]{4(x-y+1)} \end{cases}$

Giải

Một bài toán từng xuất hiện trên diendantoanhoc.net . Hình thức khá khủng bố.
Với loại hệ kiểu này hướng đi thường là ít, phương trình (1) chắc chả khai thác được gì. Thử xét phương trình (2) xem nào.

Điều kiện $\begin{cases} x-y-1\geq 0 \\ x^2+x-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq y+1 \\ x^2+x-2\geq 0 \end{cases}$

Phương trình thứ (2) tương đương

$$x^4+2x^2y-2x^2+2x+y^2-4y+11=6\sqrt[3]{4(x-y+1)}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y)^2-2(x^2+y)+2(x-y+1)+8=6\sqrt[3]{4(x-y+1)}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y-1)^2+2(x-y+1)+8=6\sqrt[3]{4(x-y+1)}$$

Ta có

$$6\sqrt[3]{4(x-y+1)}=3\sqrt[3]{2(x-y+1).4.4}\leq 2(x-y+1)+4+4$$

Từ đó suy ra

$$(x^2+y-1)^2+2(x-y+1)+8\leq 2(x-y+1)+4+4\Leftrightarrow (x^2+y-1)^2\leq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} x^2+y-1=0 \\ 2.(x-y+1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=0 \\ x=-2, y=-3 \end{array}\right.$$

Sau đó thay 2 cặp vừa rồi vào (1). Làm nốt đi nhé ! Lúc viết không có Casio :sad:

Câu 349 $\begin{cases} x^3 + xy - 2y^3 = 0 \\ 3y^3 + 3xy + 1 = 0 \end{cases}$

Giải

Liệu ban đọc còn nhớ đây là loại hệ nào không ? Chắc chả nhớ, đây cùng chủng loại với những bài hệ sử dụng phương pháp nhân 2 phương trình với nhau tạo ẩn mới.
Thay y^3 từ phương trình (2) lên (1) ta có hệ mới sau đây

$$\begin{cases} x^3 + xy - 2\left(\dfrac{-3xy-1}{3}\right) = 0 \\ 3y^3 = -3xy - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 = -9xy - 2 & (3) \\ 3y^3 = -3xy - 1 & (4) \end{cases}$$

Nhân (3) với (4) vế với vế đồng thời đặt $xy = t$ ta có

$$9t^3 = (9t+2)(3t+1) \Leftrightarrow 9t^3 - 27t^2 - 15t - 2 = 0$$

Phương trình này có 1 nghiệm duy nhất lẻ, cách giải bạn đọc xem lại ở câu 215. Từ đây ta sẽ giải ra

$$t = \frac{3 + 3\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}}{3}$$

Đến đây ta thay lại (3) và (4) trả lại x, y (khá là khủng khiếp)
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{-9a-2}{3}; \dfrac{-3a-1}{3}\right)$ với $a = \dfrac{3 + 3\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}}{3}$ $\square$

Câu 350 $\begin{cases} x + 3y + 1 = y^2 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{3x+4}{\sqrt{x+1}} \\ \sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7x+2y+2} = 2y + 3 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq -1, y \geq \dfrac{2}{9}$
Phương trình thứ nhất của hệ tương đương:

$$x + 3y + 1 = y^2 - \frac{1}{y} + 3\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 - 3\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = y^2 - 3y - \frac{1}{y}\ (\star)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 3t - \dfrac{1}{t}$ trên $(0; \propto)$ ta có

$$f'(t) = 2t - 3 + \frac{1}{t^2} = \frac{2t^3 - 3t^2 + 1}{t^2} = \frac{(t-1)^2(2t+1)}{t^2} \geq 0$$

Vậy hàm đồng biến trên $(0;\propto)$ suy ra phương trình $(\star)$ tương đương $y=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x=y^2-1$
Thế vào phương trình (2) của hệ, ta được:

$$\sqrt{9y-2}+\sqrt[3]{7y^2+2y-5}=2y+3$$
$$\Leftrightarrow\left(y+2-\sqrt{9y-2}\right)+\left(y+1-\sqrt[3]{7y^2+2y-5}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{y^2-5y+6}{y+2+\sqrt{9y-2}}+\frac{y^3-4y^2+y+6}{A}=0$$
$$\Leftrightarrow(y^2-5y+6)\left(\frac{1}{y+2+\sqrt{9y-2}}+\frac{y+1}{A}\right)=0$$

Với $A=(y+1)^2+(y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5}+\sqrt[3]{(7y^2+2y-5)^2}>0$
Do $y\geq\frac{2}{9}$ nên $\frac{1}{y+2+\sqrt{9y-2}}+\frac{y+1}{A}>0$ Từ đó suy ra

$$y^2-5y+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\Rightarrow x=3\\y=3\Rightarrow x=8\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(3;2),(8;3)\square$

Câu 351 $\left\{\begin{array}{l}x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1\\3x^2-xy^2+4x=1\end{array}\right.$

Giải

Nếu tinh ý thì dạng của phương trình thứ nhất khá quen thuộc.
Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ cho vế trái ta được

$$VT\leq\sqrt{(x^2+1-x^2)(y^2+1-y^2)}=1$$

Đẳng thức xảy ra khi $x^2+y^2=1$ thay vào phương trình thứ 2 ta được

$$x^3+3x^2+3x-1=0\Leftrightarrow(x+1)^3=2\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}-1$$

Từ đó tìm nốt y
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\sqrt[3]{2}-1;1-\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^2\right)\square$

Câu 352 $\left\{\begin{array}{l}2x^2-2y=xy-4x\\\sqrt{12x^2+3y+84}=2x+2\sqrt{x+2}+\sqrt{20-y}\end{array}\right.$

Giải

Bài này nếu nhìn qua thì chả có gì đặc biệt khi mà phương trình (1) đã là

$$(2x-y)(x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2x\\x=-2\end{array}\right.$$

Nhưng kịch hay ở phía sau, cứ làm đi đã.
TH1 : $x = -2$ thay vào phương trình thứ 2 ta được

$$\sqrt{132 + 3y} = -4 + \sqrt{20 - y} \Leftrightarrow y = -26 - 6\sqrt{5}$$

TH2 : $y = 2x$ khi đó (2) sẽ là

$$\sqrt{12x^2 + 6x + 84} = 2x + 2\sqrt{x + 2} + \sqrt{20 - 2x} \quad (3)$$

Phương trình này ta nhẩm được nghiệm $x = 2$ từ đó có thể có hướng nhân liên hợp. Tuy nhiên, giải quyết phần còn lại khá khó khăn. Một cách tinh tế ta tiến hành đánh giá phương trình này.
Ta có

$$VP = 2x + \sqrt{4(x + 2)} + \frac{1}{2}\sqrt{16(20 - 2x)} \le x + \frac{1}{4}(6 + x) + \frac{1}{8}(36 - 2x)$$

Như vậy

$$\sqrt{12x^2 + 6x + 84} \le 2x + \frac{1}{4}(6 + x) + \frac{1}{8}(36 - 2x)$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 + 6x + 84 \ge (\frac{15}{2} + \frac{9}{4}x)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{111}{16}(x - 2)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (-2; -26 - 6\sqrt{5}), (2; 4)$□

Câu 353 $\begin{cases} (x^2 - 1)^2 + 1 = 2y(2x + 1) \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

Giải

Một bài toán khá hay. Ta có đánh giá sau

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + 9 = 4xy + 2y + 8$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$x^2 + 4y^2 + 2y + 8 \ge 4xy + 2y + 8 = (x^2 - 1)^2 + 9 \ge 6(x^2 - 1) \Rightarrow x^2 + 4y^2 + 2y + 8 \ge 6(x^2 - 1) \ (\star)$$

Thay $x^2 = 3 + y^2$ từ (2) vào (*) ta được

$$5(3 + y^2) - 4y^2 - 2y - 14 \le 0 \Rightarrow (y - 1)^2 \le 0 \Rightarrow y = 1$$

Thay vào hệ ta có $x = 2$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (2; 1)$□

Câu 354 $\begin{cases} \dfrac{3}{y} = (x-1)\left(\sqrt{x^3+2}+1\right) \\ y = x^2+x+1 \end{cases}$

Giải

Một bài toán mang tính "lừa tình" khá cao được đề xuất bởi thầy Lê Trung Tín. Để ý kĩ khi nhân 2 phương trình vế với vế sẽ chỉ còn lại x. Ta thực hiện biến đổi như trên thu được

$$3 = \left(x^3-1\right)\left(\sqrt{x^3+2}+1\right)$$

Đặt $t = \sqrt{x^3+2} \Rightarrow x^3 = t^2-2, t > 0$
Khi đó phương trình trở thành

$$3 = (t+1)\left(t^2-3\right) \Leftrightarrow (t-2)\left(t^2+3t+3\right) = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)\square$

Câu 355 $\begin{cases} x(x^2+y^2) = -42 \\ 2x^2+x-y^2+2y+xy = -11 \end{cases}$

Giải

Lâu lắm không làm hệ số bất định nhỉ ? Quay lại 1 bài cho vui.
Viết lại hệ đã cho theo biến y (vì bậc của nó thấp hơn)

$$\begin{cases} xy^2+x^3+42 = 0 \\ -y^2+y(x+2)+2x^2+x+11 = 0 \end{cases}$$

Nếu hệ này có nghiệm x là số α nào đó thì khi thay α vào hệ ta phải thu được 2 phương trình tương đương ẩn y.
Một sự tinh quái ta nghĩ đến ngay $x = -2$ vì khi thay vào (2) sẽ mất y, như thế mới mong 2 phương trình tương đương được. Thay thử vào ta thu được

$$\begin{cases} -2y^2+34 = 0 \\ -y^2+17 = 0 \end{cases}$$

Ối giời ơi tương đương rồi. Trời thương ta ! Như vậy hằng số cần nhân ở đây là 2. Vậy

$$PT(1) - 2PT(2) \Leftrightarrow (x+2)\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right] = 0$$

TH1 : $x = -2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{17}$
TH2 : $x = 3; y = 1$ thay lại hệ thấy không thỏa.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (-2; \pm\sqrt{17})\square$

Câu 356 $\begin{cases} x^4 - 2x^3 - 11y^2 + 12y + 41 = 0 \\ y^4 - 2y^3 - 11x^2 + 12x + 31 = 0 \end{cases}$

Giải

Trớ trêu thay ! Hình thức khá đối xứng thế mà hằng số chết tiệt kia đã khiến hi vọng trở thành thất vọng. Khi bạn đọc những câu có hình thức kiểu na ná đối xứng thế này thì lời giải thường làm gì. Còn gì nữa ! Cộng 2 phương trình lại cho tôi.
Lấy $PT(1) + PT(2)$ ta được

$$(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + y^4 - 2y^3 - 11y^2 + 12y + 72 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 6)^2 + (y^2 - y - 6)^2 = 0$$

Như vậy tức là

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ y^2 - y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, x = -2 \\ y = 3, y = -2 \end{cases}$$

Tất nhiên ta phải thay lại hệ để xem cặp nào thỏa mãn
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (3; -2)\square$

Câu 357 $\begin{cases} x^2y + y = 2x \\ y^4 - x^2 = 2(1 - x) \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1 + x^2} \\ y^4 = (x - 1)^2 + 1 \end{cases}$$

Hãy để ý kĩ đến dàng buộc của y.
Từ phương trình (2) ta có ngay $y^4 \geq 1 \Leftrightarrow y^2 \geq 1$
Từ phương trình (1 dễ chứng minh $-1 \leq \dfrac{2x}{1 + x^2} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$ Vậy ràng buộc của y trái ngược. Nó thỏa mãn khi $y = 1, x = 1$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1)\square$

Câu 358 $\begin{cases} 1 + 4\sqrt{y(x - 1)} = 4y + (x - y)^2 \\ \sqrt{y} + x - 3 = 0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \geq 0, x \geq 1$
Phương trình thứ nhất tương đương

$$(x - y)^2 - 2(x - y) + 1 + 2(x - 1 + 2\sqrt{y(x - 1)} + y) = 0 \Leftrightarrow (x - y - 1)^2 + 2\left(\sqrt{y} - \sqrt{x - 1}\right)^2 = 0$$

Như vậy tức là suy ra $x = y + 1$ thay vào (2) ta được

$$y + \sqrt{y} - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 1)\square$

Câu 359 $\begin{cases} x^4 = 2x^2y + 3xy \\ y^2 = 4x^2 - 3x^3 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y)^2 = y^2 + 3xy \\ y^2 = 4x^2 - 3x^3 \end{cases}$$

Cộng 2 phương trình vế với vế ta suy ra

$$\Rightarrow (x^2 - y)^2 + 3x(x^2 - y) - 4x^2 = 0$$

Rõ ràng là phương trình thuần nhất giữa 2 ẩn $x^2 - y$ và x. Từ đó ta có

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - y = x \Leftrightarrow y = x^2 - x \\ x^2 - y = -4x \Leftrightarrow y = x^2 + 4x \end{array}\right.$$

Với mỗi trường hợp trên thay lại vào phương trình thứ nhất.
Vậy hệ đã cho có nghiệm :
$(x; y) = (0; 0), \left(\dfrac{-1 - \sqrt{13}}{2}; 4 + \sqrt{13}\right), \left(\dfrac{\sqrt{13} - 1}{2}; 4 - s\sqrt{13}\right), \left(\dfrac{-11 - \sqrt{73}}{2}; \dfrac{53 + 7\sqrt{73}}{2}\right)$
$, \left(\dfrac{\sqrt{73} - 11}{2}; \dfrac{53 - 7\sqrt{73}}{2}\right)\square$

Câu 360 $\begin{cases} x\sqrt{4 - y^2} = y\sqrt{4 - x^2} \\ y^2 - x^3 + 3x = 2 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $-2 \leq x, y \leq 2$
Phương trình thứ nhất ta suy ra

$$4x^2 - x^2y^2 = 4y^2 - x^2y^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2$$

Thay vào (2) ta được

$$x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = \pm 2$
Với $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \pm\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
Với $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \pm\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$
Tất nhiên phải loại nghiệm ngoại lai do phép bình phương (1)
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (2; 2), (2; -2), \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ □

2.13 Câu 361 đến câu 390

Câu 361 $\begin{cases} 9y^3 - x^3 = -8 \\ y^2 - xy + 8x = -8 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 + 8(x^3+1) = 0 & (1) \\ y^2 - xy + 8(x+1) = 0 & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$(x^3 - y^3) + (xy - y^2)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(y+1)(x^2+y) = 0$$

TH1 : $x = y \Rightarrow 8x^3 = -8 \Leftrightarrow x = y = -1$
TH2 : $y = -1 \Rightarrow x = -1$
TH3 : $y = -x^2$ thay xuống (2) ta được

$$x^4 + x^3 + 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2, y = -4$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (-1; -1), (-2; -4)$□

Câu 362 $\begin{cases} 4x^3 + y^3 - 3xy^2 = -8 \\ 3x^2 + 24x + 3xy = -24 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 4x^3 + y^3 - 3xy^2 = -8 \\ 3x^3 + 24x^2 + 3x^2y = -24x \end{cases}$$

Cộng 2 phương trình trên cho nhau ta được

$$7x^3 + y^3 - 3xy^2 + 3x^2y + 24x^2 = -24x - 8 \Leftrightarrow (x-y)^3 = 8(x+1)^3 \Leftrightarrow y = -x - 2$$

Thay xuống (2) ta có

$$3x^2 - 24x - 3x(x+2) = -24 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ $\square$

Câu 363 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} - x - y = 1 \\ (x-y)^4 = \dfrac{x+y}{xy} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x, y \neq 0$
Phương trình (1) suy ra

$$\frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2 - xy)}{xy} = 1 \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 = xy$$

Thay vào (2) ta được

$$(x+y)^3 = x^3y^3 \Leftrightarrow x + y = xy \qquad (\star)$$

Như vậy (2) sẽ là

$$(x-y)^4 = 1 \Leftrightarrow x - y = \pm 1$$

Thay vào $(\star)$ dễ dàng tìm được nghiệm
Vậy hệ đã cho có nghiệm :

$(x;y) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ $\square$

Câu 364 $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2\left(\sqrt{1-2x} + \sqrt{2y+1}\right) \\ x^2 - 7xy + y^2 + 1 = 0 \end{cases}$

Giải

Một bài toán khá hóc búa của thầy Lê Trung Tín.

Điều kiện : $\begin{cases} x \leq \dfrac{1}{2};\ x \neq 0 \\ y \geq \dfrac{-1}{2};\ y \neq 0 \end{cases}$

Phương trình (2) không thể làm ăn được gì. Mấu chốt có lẽ là từ (1). Nhận thấy biểu thức chứa 2 biến rời nhau hoàn toàn, như vậy có thể sẽ xét hàm số hoặc nhóm chúng lại để ra cái

gì đó đặc biệt.
Thực hiện phép biến đổi (1) ta có

$$x+\frac{1}{x}-2\sqrt{1-2x}+y+\frac{1}{y}-2\sqrt{2y+1}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(x^2-2x\sqrt{1-2x}+1-2x\right)+\frac{1}{y}\left(y^2-2y\sqrt{2y+1}+2y+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(x-\sqrt{1-2x}\right)^2+\frac{1}{y}\left(y-\sqrt{2y+1}\right)^2=0$$

Nhưng một điều chưa làm ta thỏa mãn là chưa biết x, y có cùng dấu hay không ? Nếu nó cùng dấu thì tốt quá, khi đó (1) sẽ là tổng của các đại lượng không âm hoặc không dương, còn trái dấu thì....Có cách nào biết nó cùng hay trái dấu không ? Cùng dấu hẳn là $xy > 0$, vậy phương trình (2) để làm gì ? Dùng nó vào lúc này thôi.
Xét (2) nếu $xy < 0$ thì vế trái luôn dương (vô lý). Vậy x, y cùng dấu. Tức là dấu bằng ở (1) xảy ra khi

$$\begin{cases} x=\sqrt{1-2x} \\ y=\sqrt{2y+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1\pm\sqrt{2} \\ y=1\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

So với điều kiện thì ta suy ra $\begin{cases} x=-1+\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-1-\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(-1+\sqrt{2};1+\sqrt{2}),(-1-\sqrt{2};1-\sqrt{2})\square$

Câu 365 $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=15 \\ y^4+y=x \end{cases}$

Giải

Đây là một dạng quen thuộc nhưng khá đẹp mắt nên tôi vẫn muốn giới thiệu cho bạn đọc.
Viết lại hệ như sau

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=15 \\ y^4=x-y \end{cases}$$

Hẳn là nhận ra có thể đưa về dạng đẳng cấp rồi phải không ? Nhân chéo lên ta được

$$(x-y)(x+y)(x^2+y^2)=15y^4 \Leftrightarrow x^4-y^4=15y^4 \Leftrightarrow x=\pm 2y$$

Với $x=2y,\ PT(2) \Leftrightarrow y(y^3-1)=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=2$

Với $x=-2y,\ PT(2) \Leftrightarrow y(y^3+3)=0 \Rightarrow y=-\sqrt[3]{3} \Rightarrow x=2\sqrt[3]{3}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(2;1),(2\sqrt[3]{3};-\sqrt[3]{3})\square$

Câu 366 $\begin{cases} x^3+\sqrt{x^2+2y+1}=x^2y+y+1 \\ (x+y-1)\sqrt{y+1}=10 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \geq -1, x^2+2y+1 \geq 0$
Phương trình thứ nhất tương đương

$$x^2(x-y)+\sqrt{x^2+2y+1}-(y+1)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-y)+\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}\right)=0$$

Dễ thấy $y+1 \geq 0$ đồng thời để (2) có nghiệm thì $x+y \geq 1$
Vậy suy ra $x=y$ thay vào (2) ta được

$$(2y-1)\sqrt{y+1}=10 \Leftrightarrow y=3$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(3;3)\square$

Câu 367 $\begin{cases} 4x^2y^2+8xy-3y^2=-1 \\ 6xy+4x+y=-3 \end{cases}$

Giải

Đây là bài toán do thầy Lê Trung Tín từng đăng trên Boxmath. Đây là một dạng cũng khá quen thuộc trong cuốn sách tôi có giới thiệu 1 câu nhưng quên khuấy mất chỗ nào rồi :sad:.
Bài toán này thầy Lê Đình Mẫn có một hướng giải khá hay. Đó là
Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ.
Với $y \neq 0$ chia PT(1) cho y^2 và PT(2) cho y rồi trừ vế với vế ta được

$$\left(2x+\frac{1}{y}-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

Tất nhiên đây là một hướng khá đẹp mắt nhưng không phải dễ nghĩ, hoàn toàn dựa vào kinh nghiệm. Tôi xin giới thiệu cho bạn đọc một ý tưởng khác của tôi cho bài này.
Hệ viết lại

$$\begin{cases} 4x^2y^2+1=3y^2-8xy \\ 3(2xy+1)=-y-4x \end{cases}$$

Bình phương phương trình (2) ta suy ra $9(4x^2y^2+1)+36xy=y^2+8xy+16x^2$
Thế lượng $4x^2y^2+1=3y^2-8xy$ từ trên xuống ta được

$$9(3y^2-8xy)+36xy=y^2+8xy+16x^2$$

Đây là phương trình thuần nhất bậc 2 khá đơn giản. Ta rút được x theo y. Việc giải nó xin nhường cho bạn đọc.

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\dfrac{4-\sqrt{42}}{4};\dfrac{\sqrt{42}-4}{13}\right),\left(\dfrac{4+\sqrt{42}}{4};\dfrac{-4-\sqrt{42}}{13}\right)$ □

Câu 368 $\begin{cases} \sqrt{5x-y}-\sqrt{2y-x}=1 \\ 2\sqrt{2y-x}+3xy=2x^2+y^2+3x-1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $\dfrac{x}{2} \le y \le 5x$

Hệ chứa 2 căn thức. Bạn đọc xem $2\sqrt{2y-x}$ nó sinh ra từ đâu ? Đó là chuyển vế và bình phương (1).Như vậy phương trình (1) tương đương

$$\sqrt{5x-y}=1+\sqrt{2y-x} \Leftrightarrow 5x-y=1+2y-x+2\sqrt{2y-x} \Leftrightarrow 2\sqrt{2y-x}=6x-2y-1$$

Thay xuống (2) rút gọn ta được

$$2x^2-3(y+1)x+y^2+3y=0 \Leftrightarrow (x-y)(2x-y-3)=0$$

Với $x=y$ thay (1) ta được $\sqrt{4x}-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$

Với $y=2x-3$ thay (1) ta được $\sqrt{3x+3}-\sqrt{3x-6}=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{22}{3}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1),\left(\dfrac{22}{3};\dfrac{35}{3}\right)$ □

Câu 369 $\begin{cases} \sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}=1 \\ x+\sqrt{8x+y^2}=8 \end{cases}$

Giải

Một lời giải đẹp cho bài này.

Điều kiện : $y \ge 1, x \ge 2$

Từ (1) ta có $\sqrt{x-2}=1+\sqrt{y-1} \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 3$

Từ (2) ta có $VT \ge 3+\sqrt{8.3+1}=8$

Đẳng thức xảy ra khi $x=3, y=1$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(3;1)$□

Câu 370 $\begin{cases} (x^2+9)(x^2+9y) = 22(y-1)^2 \\ x^2 - 2 - 4y\sqrt{y+1} = 0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y \geq -1$
Đặt $x^2+9 = a, y-1 = b$. Phương trình thứ nhất tương đương

$$a(a+9b) = 22b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -11b \\ a = 2b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = -11y+2 \\ x^2 = 2y-11 \end{array}\right.$$

Thay vào phương trình thứ (2) dễ dàng tìm ra nghiệm.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (\sqrt{2};0), (-\sqrt{2};0)\square$

Câu 371 $\begin{cases} (x-2y)\left(3x+8y+4\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16}\right) = -6 \\ (y-4x)\left(3y+2x+2\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16}\right) = -10 \end{cases}$

Giải

Bài toán xuất hiện trong 1 đề thi thử của page **Hội những người ôn thi đại học** trên facebook. Không hiểu tên nào nghĩ ra thể loại hệ này ?
Cộng 2 phương trình vế với vế ta có

$$(x-2y)(3x+8y)+(y-4x)(3y+2x)-2(2x+3y)\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16} = -16$$

$$\Leftrightarrow -5x^2-10xy-13y^2-2(2x+3y)\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16} = -16$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4xy+4y^2-16)+2(2x+3y)\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16}+(2x+3y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x+3y+\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-4xy+4y^2-16} = -(2x+3y)$$

Thay lại vào cả 2 phương trình ta có

$$\begin{cases} (x-2y)(5x+4y) = 6 \\ (y-4x)(3y+2x) = 10 \end{cases}$$

Hệ đẳng cấp rõ ràng rồi nhể. Tự giải nốt nhé !
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (-\sqrt{2};\sqrt{2}), (\sqrt{2};-\sqrt{2})\square$

Câu 372 $\begin{cases} x^4 - y^4 = \dfrac{121x - 122y}{4xy} \\ x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = \dfrac{122x + 121y}{x^2 + y^2} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x, y \neq 0$
Hệ đã cho tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4xy(x^2 - y^2) = \dfrac{121x - 122y}{x^2 + y^2} & (1) \\ x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = \dfrac{122x + 121y}{x^2 + y^2} & (2) \end{cases}$$

Dạng này nếu ai chú ý thì tôi đã nêu 1,2 câu kiểu này rồi. Ta thực hiện

$$\begin{cases} (1).x + (2).y \\ (2).x - (1).y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^5 + 10x^2y^3 + 5x^4y = 121 \\ x^5 + 10x^3y^2 + 5xy^4 = 122 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^5 = 3^5 \\ (x - y)^5 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2, y = 1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (2; 1)$ $\square$

Câu 373 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ \sqrt[2011]{x} - \sqrt[2011]{y} = \left(\sqrt[2013]{y} - \sqrt[2013]{x}\right)(x + y + xy + 2014) \end{cases}$

Giải

Từ phương trình (1) ta có $-1 \leq x, y \leq 1$
Thế thì $x + y + xy + 2014 = (1 + x)(1 + y) + 2013 > 0$
Rõ ràng như thế từ phương trình (2) ta phải suy ra $x = y$ thay vào (1) và ta tìm được

$$\left[\begin{array}{l} x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\square$

Câu 374 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^{10} + y^{10} = \dfrac{1}{8} \end{cases}$

Giải

Liệu có thím nào chơi mũ 5 phương trình thứ nhất rồi đưa về dạng đẳng cấp bậc 10 không ? Chắc chả ai điên. Ta biến đổi phương trình (1) thành

$$x^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-y^2=a$$

Từ đó suy ra $x^2=\frac{1}{2}+a, y^2=\frac{1}{2}-a$ thay hết vào (2) ta được

$$\left(\frac{1}{2}+a\right)^5+\left(\frac{1}{2}-a\right)^5=\frac{1}{8}\Leftrightarrow 5a^4+\frac{5}{2}a^2-\frac{1}{16}=0$$

$$\Leftrightarrow a=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}\left(\sqrt{30}-5\right)}$$

Đến đây thay trở lại dễ dàng tìm được x, y

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(-\sqrt{\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{5(\sqrt{30}-5)}\right)};-\sqrt{\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{5(\sqrt{30}-5)}\right)}\right)$
$\left(-\sqrt{\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{5(\sqrt{30}-5)}\right)};\sqrt{\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{5(\sqrt{30}-5)}\right)}\right)$
$\left(\sqrt{\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{5(\sqrt{30}-5)}\right)};-\sqrt{\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{5(\sqrt{30}-5)}\right)}\right)$
$\left(\sqrt{\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{5(\sqrt{30}-5)}\right)};\sqrt{\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{5(\sqrt{30}-5)}\right)}\right)$
$\left(-\sqrt{\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{5(\sqrt{30}-5)}\right)};\sqrt{-\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{5(\sqrt{30}-5)}\right)}\right)$ $\square$

Câu 375 $\begin{cases}2x^2+xy+y=5\\ x^4+x^3y+x^2(y+1)+xy+y=9\end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+1)+(x^2+xy+y)=6\\ (x^2+1)\left(x^2+xy+y\right)=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=3\\ x^2+xy+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{2}\Rightarrow y=-1-\sqrt{2}\\ x=\sqrt{2}\Rightarrow y=\sqrt{2}-1\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(-\sqrt{2};-1-\sqrt{2}),(\sqrt{2};\sqrt{2}-1)$ $\square$

Câu 376 $\begin{cases} x^2y^2 + 4x^2y - 3xy^2 + x^2 + y^2 = 12xy + 3x - 4y + 1 \\ 3x^2 - 2y^2 = 9x + 8y + 3 \end{cases}$

Giải

Ta sử dụng phương pháp hệ số bất định cho bài này. Viết lại hệ đã cho theo ẩn x

$$\begin{cases} x^2(y^2 + 4y + 1) - 3x(y^2 + 4y + 1) + y^2 + 4y - 1 = 0 \\ 3x^2 - 9x - 2y^2 - 8y - 3 = 0 \end{cases}$$

Thử cho các hệ số tỉ lệ với nhau. Tức là

$$\frac{y^2 + 4y + 1}{3} = \frac{y^2 + 4y + 1}{3} = \frac{y^2 + 4y - 1}{-2y^2 - y - 3} \Leftrightarrow y = -2, 0, -4$$

Thay $y = -2$ lại vào hệ được

$$\begin{cases} -3x^2 + 9x - 5 = 0 \\ 3x^2 - 9x + 5 = 0 \end{cases}$$

Như vậy ta cần làm là lấy $PT(1) + PT(2)$. Sẽ được

$$x^2y^2 + 4x^2y - 3xy^2 + 4x^2 - y^2 = 12xy + 12x + 4y + 4$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x - 1)(y + 2)^2 = 0$$

Đơn giản nhiều rồi.

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\frac{9 \pm \sqrt{21}}{6}; -2\right), \left(\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}; 0\right), \left(\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}; -4\right)$ $\square$

P/S : Thay $y = 0, y = -4$ ta cũng được những cách khác đẹp mắt tương tự. Hiếm lắm tôi mới thấy một bài hệ nghiệm đúng nhiều như này.

Câu 377 $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 2x = 5y \\ x^3 + x^2y - x^2 + 2xy - 6x + 3y = 0 \end{cases}$

Giải

Cộng 2 phương trình vế với vế ta được

$$PT(1) + PT(2) \Rightarrow (x^3 + xy + 2x^2) + (y^2 + x^2y + 2xy) - (2y + 2x^2 + 4x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + y - 2)(x^2 + 2x + y) = 0$$

TH1 : $y = 2 - x$

$$\Rightarrow PT(1) \Leftrightarrow x^2 + (2 - x)^2 + x(2 - x) + 2x - 5(2 - x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 6) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 1 \\ x = -6; y = 8 \end{array} \right.$$

TH2 : $y = -x^2 - 2x$

$\Rightarrow PT(1) \Leftrightarrow x^2 + (-x^2 - 2x)^2 + x(-x^2 - 2x) + 2x - 5(-x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow x(x+2)(x+4) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; y = 0 \\ x = -2; y = 0 \\ x = -4; y = -8 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1), (-6; 8), (0; 0), (-2; 0), (-4; -8)$□

Câu 378 $\begin{cases} 2x^2\sqrt{xy} + x^3 + y^3 = 4x^2y \\ y + \sqrt{x} = \sqrt{-2x^2 + 14y - 9} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x, y > 0$
Ta có đánh giá sau

$$x^2\sqrt{xy} + x^2\sqrt{xy} + x^3 + y^3 \geq 4\sqrt[4]{x^2\sqrt{xy}x^2\sqrt{xy}x^3y^3} = 4x^2y$$

Tức là $VT \geq VP$ đẳng thức xảy ra khi $x = y$
Thay vào phương trình (2) ta có

$x + \sqrt{x} = \sqrt{-2x^2 + 14x - 9} \Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x} + x = -2x^2 + 14x - 9 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x\sqrt{x} - 13x + 9 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x} > 0$ như vậy ta được

$$3t^4 + 2t^3 - 13t^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \left(3t^2 - t - 3\right)\left(t^2 + t - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1 + \sqrt{37}}{6} \Rightarrow x = \dfrac{19 + \sqrt{37}}{18} \\ t = \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{7 - \sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\dfrac{19 + \sqrt{37}}{18}; \dfrac{19 + \sqrt{37}}{18}\right), \left(\dfrac{7 - \sqrt{13}}{2}; \dfrac{7 - \sqrt{13}}{2}\right)$□

Câu 379 $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{7x - y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{6}{7x - y} = 2 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x, y > 0$
Ta thực hiện phép biến đổi sau để đưa về hệ mới

$$\begin{cases} 2.PT(1)+PT(2) \\ PT(2)-4.PT(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=3 \\ \dfrac{18}{7x-y}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}} \\ \dfrac{18}{7x-y}=\dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}} \end{cases}$$

Nhân vế với vế ta được

$$\frac{54}{7x-y}=\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

Rõ ràng là một phương trình thuần nhất, đặt $x=ty, t>0$. Phương trình trở thành

$$\frac{54}{7t-1}=\frac{8}{t}+\frac{2}{\sqrt{t}}-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \Rightarrow x=y \\ t=4 \Rightarrow x=4y \end{array}\right.$$

Với $x=y$ thay vào (1) ta được

$$\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{2y}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=1$$

Với $x=4y$ thay vào (1) ta được

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{1}{9y}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{4}{9} \Rightarrow x=\frac{16}{9}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1),\left(\frac{16}{9};\frac{4}{9}\right)$ $\square$

Câu 380 $\begin{cases} \dfrac{3x}{y^2}+\dfrac{4x^2+12y^2}{x^3+y^3}=\dfrac{11-\sqrt{xy^3-4}}{x} \\ \dfrac{3y}{x^2}+\dfrac{4y^2+12x^2}{x^3+y^3}=\dfrac{11-\sqrt{x^3y-4}}{y} \end{cases}$

Giải

Đây là một bài toán khá khó và mang tính đánh đố về mặt ý tưởng. Tôi xin giới thiệu cho bạn đọc một cách giải tốt trên Boxmath.
Điều kiện : $x^3y \geq 4$
Từ điều kiện suy ra x, y cùng dấu, nên nếu $(x;y)$ là nghiệm thì $(-x,-y)$ cũng là nghiệm. Vậy nên ta chỉ cần xét đại diện trường hợp $y \leq x < 0$. Đặt $t=\dfrac{y}{x} \geq 1$. Từ (2) suy ra

$$3t^2+\frac{4t+12}{t^3+1} \leq 11 \Rightarrow (t-1)(3t^4+3t^3-8t^2-t-1) \leq 0$$

Từ đây suy ra $t<2$. Vì nếu $t \geq 2$ suy ra

$$(t-1)(3t^4+3t^3-8t^2-t-1)=(t-1)(2t^2(t^2-4)+(t^4-1)+(t^3-t))>0. \qquad (VL)$$

Như vậy ta có

$$3\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)+\frac{12(x^2+y^2)}{x^3+y^3}\le\frac{11}{x}+\frac{11}{y}$$
$$\Rightarrow (x-y)^2(3x^4-5x^3y-8x^2y^2-5xy^3+3y^4)\le 0$$
$$\Rightarrow (x-y)^2.x^4.(3t^4-5t^3-8t^2-5t+3)\le 0$$

Cộng 2 phương trình vế với vế ta được

$$3\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)+\frac{12(x^2+y^2)}{x^3+y^3}=\frac{11}{x}+\frac{11}{y}-\left(\frac{\sqrt{xy^3}}{x}+\frac{\sqrt{yx^3}}{y}\right)\quad (3).$$

Như vậy ta có $VT(3)\le\frac{11}{x}+\frac{11}{y}$ trong khi $VP(3)\ge\frac{11}{x}+\frac{11}{y}$ (do $x,y>0$). Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases}x^3y=4=y^3x\\x=y\end{cases}\quad\Leftrightarrow x=y=\sqrt[4]{4}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(\sqrt[4]{4};\sqrt[4]{4}),(-\sqrt[4]{4};-\sqrt[4]{4})\square$

Câu 381 $\begin{cases}xy+x+y=3\\\dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{1}{y^2+2y}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

Giải

Đây là một bài toán không khó như đẹp mắt.
Điều kiện :$x,y\ne 0,2$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)=4\\\dfrac{1}{(x+1)^2-1}+\dfrac{1}{(y+1)^2-1}=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=4\\\dfrac{1}{a^2-1}+\dfrac{1}{b^2-1}=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2,b=2\\a=-2,b=-2\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1\\x=y=-3\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1),(-3;-3)\square$

Câu 382 $\begin{cases}[(x+1)(y+1)]^2=-9xy\\(x^2+1)(y^2+1)=-10xy\end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2+1+2x)(y^2+1+2y)=-9xy\\ (x^2+1)(y^2+1)=-10xy\end{cases}$$

Vì $x,y=0$ không là nghiệm của hệ nên tương đương

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x^2+1}{x}+2\right)\left(\dfrac{y^2+1}{y}+2\right)=-9\\ \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)\left(\dfrac{y^2+1}{y}\right)=-10\end{cases}$$

Đặt $\dfrac{x^2+1}{x}=a, \dfrac{y^2+1}{y}=b$ ta có hệ mới

$$\begin{cases}(a+2)(b+2)=-9\\ ab=-10\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-4, b=\dfrac{5}{2}\\ a=\dfrac{5}{2}, b=-4\end{array}\right.$$

TH1 :

$$\begin{cases}x^2+1=-4x\\ y^2+1=\dfrac{5}{2}y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\pm\sqrt{3}\\ y=2\vee y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Trường hợp 2 tương tự chỉ là hoán đổi giá trị nghiệm.

Như vậy hệ có tất cả 8 cặp nghiệm □

Câu 383 $\begin{cases}x+\sqrt{x^2+1}=y+\sqrt{y^2-1}\\ x^2+y^2-xy=1\end{cases}$

Giải

Điều kiện :$|y|\geq 1$

Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại như sau:

$$x-\sqrt{y^2-1}=y-\sqrt{x^2+1}$$

Bình phương 2 vế ta thu được:

$$-1-2x\sqrt{y^2-1}=1-2y\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow y\sqrt{x^2+1}=1+x\sqrt{y^2-1}$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2+y^2=1+x^2y^2-x^2+2x\sqrt{y^2-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-\sqrt{y^2-1})^2=0\Leftrightarrow x^2-y^2=-1$$

Chú ý $x^2-xy+y^2=\dfrac{3(x-y)^2}{4}+\dfrac{(x+y)^2}{4}$

Như vậy hệ sẽ là

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)(x+y)=1\\ \dfrac{3(x-y)^2}{4}+\dfrac{(x+y)^2}{4}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}ab=-1\\ 3a^2+b^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1, b=1\\ a=1, b=-1\\ a=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, b=\sqrt{3}\\ a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}, b=-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x+y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x+y=-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=1 \\ x=0, y=-1 \\ x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}, y=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Tất nhiên ta phải đối chiếu điều kiện bình phương nữa.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (0; 1), \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ $\square$

Câu 384 $\begin{cases} x^3 + y^2x + 3x^2 + y^2 = 2y - 3x - 1 \\ 2y^3 + xy^2 + y^2 - 3x - 3 = 0 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho biến đổi thành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^3 + y^2(x+1) = 2y \\ 2y^3 + y^2(x+1) = 3(x+1) \end{cases}$$

Để ý kĩ hoàn toàn đưa về đẳng cấp được. Nhân chéo phát ta được

$$3(x+1)^4 + 3(x+1)^2y^2 = 4y^4 + 2y^3(x+1)$$

$$\Rightarrow 3(x+1)^4 + 3(x+1)^2y^2 - 2(x+1)y^3 - 4y^4 = 0$$

Xét $y = 0 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm của hệ.
Xét $y \neq 0$, chia cả 2 vế cho y^4 ta được

$$3\left(\frac{x+1}{y}\right)^4 + 3\left(\frac{x+1}{y}\right)^2 - 2\frac{x+1}{y} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{y} = 1 \\ \dfrac{x+1}{y} = 1 - \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x+1 \\ x = y(1-\sqrt{3}) - 1 \end{array}\right.$$

Đến đây việc thay lại xin nhường cả cho bạn đọc :brick:
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (-2; -1), (-1; 0), (0; 1)$ $\square$

Câu 385 $\begin{cases}(x-y)(x^2+y^2)=x^4-1\\(x+y)(x^4+y^4)=x^4+1\end{cases}$

Giải

Để ý kĩ khi nhân vế với vế sẽ rút gọn hàng loạt.
Như vậy nhân vế với vế suy ra

$$x^8-y^8=x^8-1\Rightarrow y=1\vee y=-1$$

Với $y=1$. Thay vào phương trình (2) ta được

$$(x+1)(x^4+1)=x^4+1\Leftrightarrow x=0$$

Với $y=-1$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$(x+1)(x^2+1)=x^4-1\Leftrightarrow x=-1\vee x=2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(0;1),(-1;-1),(2;-1)\square$

Câu 386 $\begin{cases}x^2y^2+2y^2+16=11xy\\x^2+2y^2+12y=3xy^2\end{cases}$

Giải

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ. Chia phương trình (1) cho y^2, phương trình (2) cho y^2 ta được.

$$\begin{cases}x^2+\dfrac{16}{y^2}+2=\dfrac{11x}{y}\\\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2+\dfrac{12}{y}=3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-\dfrac{4}{y}\right)^2+2=3\dfrac{x}{y}\\\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2=3\left(x-\dfrac{4}{y}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-3b=-2\\b^2-3a=-2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=1\\a=b=2\end{array}\right.$$

Đến đây dễ dàng thay lại tìm nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(-2;-1),(4;2),\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2};\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right),\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\square$

Câu 387 $\begin{cases}x^2+2y^2+3xy+3=0\\\dfrac{x-y+18}{(x+y)^2}=9\sqrt{x-y}\end{cases}$

Giải

Nhìn hình thức có lẽ bài này đưa về đặt ẩn tổng hiệu là tốt nhất.
Điều kiện : $x-y\geq 0,x+y\neq 0$

Đặt $\sqrt{x-y} = a\,(a \geq 0)\,;\ b = x + y(b \neq 0) \Rightarrow\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - y = a^2 \\ x + y = b \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = a^2 + b \\ 2y = b - a^2 \end{array} \right.$

Suy ra :

$$x^2 + 2y^2 + 3xy = \left(\frac{a^2+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b-a^2}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{a^2+b}{2}\right)\left(\frac{b-a^2}{2}\right)$$
$$= \frac{a^4 + 2a^2b + b^2 + 2\left(b^2 - 2ba^2 + a^4\right) + 3\left(b^2 - a^4\right)}{4} = \frac{6b^2 - 2ba^2}{4}$$

Từ đó ta có hệ phương trình :

$$\left\{ \begin{array}{c} 3b^2 - ba^2 + 6 = 0 \\ a^2 + 18 = 9b^2a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 9b^2 - 3ba^2 + 18 = 0 & (1) \\ a^2 - 9b^2a + 18 = 0 & (2) \end{array} \right.$$

Trừ (1) cho (2) theo từng vế sẽ có :

$$\left(9b^2 - a^2\right) + 3ba\,(3b - a) = 0 \Leftrightarrow (3b - a)\,(3b + a + 3ba) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 3b - a = 0 \\ 3b + a + 3ba = 0 \end{array} \right.$$

Ta xét trường hợp khó trước, mong cho nó vô lý.
Với $3b + a + 3ba = 0$ thay vào (1) ta được

$$9b^2 + 3a\,(3b + a) + 18 = 0 \Leftrightarrow 3b^2 + 3ba + a^2 + 6 = 0$$

Rõ ràng vế trái luôn dương. Vậy chỉ còn $a = 3b$ thay vào (1) sẽ tìm được

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5, y = -4$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (5; -4)\square$

Câu 388 $\begin{cases} x^3y^3 + xy^3 + y^2 = 4xy^2 - 1 \\ x^2y^2 + x^2 + y^2 = 4xy - 1 \end{cases}$

Giải

Phương trình thứ (2) biến đổi sẽ thành

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 = 4xy - 1 \Leftrightarrow (xy - 1)^2 + (x - y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{array} \right.$$

Thay lên phương trình (1) chỉ có cặp thứ nhất là thỏa mãn.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1)\square$

Câu 389 $\begin{cases} \sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}=\sqrt{xy+2} \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $|x|, |y| \geq 1$
Phương trình thứ nhất tương đương

$$x^2+y^2-4-xy+2\sqrt{x^2y^2-(x^2+y^2)+1}=0$$

Đặt $a=xy, b=x^2+y^2$ ta thu được hệ mới

$$\begin{cases} b-4-a+2\sqrt{a^2-b+1}=0 \\ b=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1, b=1 \\ a=2, b=4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=\sqrt{2} \\ x=y=-\sqrt{2} \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ $\square$

Câu 390 $\begin{cases} x(y-9)+\sqrt{y-1}+1=0 \\ y(18x^2+1)=3x+22+(xy+1)^2 \end{cases}$

Giải

Điều kiện $y \geq 1$
Phương trình thứ nhất suy ra

$$(x(y-9)+1)^2-y+1=0 \Leftrightarrow x^2y^2-18yx^2+2xy+81x^2-18x+2-y=0$$

Phương trình thứ hai thì :

$$18yx^2+y-3x-23-x^2y^2-2xy=0$$

Cộng 2 chú lại ta được

$$81x^2-21x-21=0 \Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{805}}{54}$$

Thay lại tìm y (khá lẻ)

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\frac{7+\sqrt{805}}{54}; \frac{327-3\sqrt{805}-\sqrt{36782-842\sqrt{805}}}{28}\right)$
$\left(\frac{7-\sqrt{805}}{54}; \frac{327+3\sqrt{805}+\sqrt{36782+842\sqrt{805}}}{28}\right)$ $\square$

2.14 Câu 391 đến câu 410

Câu 391 $\begin{cases} x = (y^2-1)(y+2)+1 \\ xy(xy-1)^2 + x^2y^2 = (x+1)(x^2+x+1) \end{cases}$

Giải

Biến đổi phương trình (2) trở thành

$$xy(x^2y^2 - xy + 1) = (x+1)[(x+1)^2 - (x+1) + 1] \Leftrightarrow f(xy) = f(x+1)$$

Với $f(t) = t^3 - t^2 + t$ đơn điệu tăng, từ đó ta có ngay $xy = x+1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{y-1}$ thay lên (1) ta được.

$$\frac{1}{y-1} = (y^2-1)(y+2)+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Từ đó trả lại biến x

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (-1;0), \left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right), \left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}; \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$ $\square$

Câu 392 $\begin{cases} x^3 - x^2y = x^2 - x + y + 1 \\ x^3 - 9y^2 + 6(x-3y) - 15 = 3\sqrt[3]{6x^2+2} \end{cases}$

Giải

Phương trình thứ nhất tương đương

$$(x^2+1)(x-y-1) = 0 \Leftrightarrow y = x-1$$

Thay vào (2) ta sẽ được

$$(x-1)^3 + 3(x-1) = 6x^2 + 2 + 3\sqrt[3]{6x^2+2}$$

Do $f(t) = t^3 + 3t$ đơn điệu tăng nên suy ra

$$x - 1 = \sqrt[3]{6x^2+2} \Leftrightarrow x^3 - 9x + 3 - 3 = 0$$

Phương trình này nghiệm duy nhất khá lẻ, ta có thể làm bằng đặt ẩn kiểu Hypebolic tôi đã giới thiệu ở câu 215. Tuy nhiên, tinh tế ta sẽ biến đổi nó về

$$(x+1)^3 = 2(x-1)^3 \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{2}(x-1) \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}; \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}-1}\right)$ $\square$

Câu 393 $\begin{cases} y^2+3x=\dfrac{2y}{x} \\ x^2+y=-\dfrac{2x}{y} \end{cases}$

Giải

Điều kiện :$x, y \neq 0$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} y(y-\dfrac{2}{x})=-3x \quad (1) \\ x(x+\dfrac{2}{y})=-y \quad (2) \end{cases}$$

Nhận (1) với (2) vế với vế ta được

$$(y-\frac{2}{x})(x+\frac{2}{y})=3 \Leftrightarrow xy-\frac{4}{xy}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=4 \\ xy=-1 \end{array}\right.$$

Đến đây đơn giản rồi !
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(-1;1), \left(-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}};-2\sqrt[3]{3}\right)$ □

Câu 394 $\begin{cases} 4+(5x^2+2y-1)\,x\sqrt{y}=5x^2+y\,(2+3x^2) \\ 4x+5\sqrt{y}+\dfrac{2\,(3x^2+5)}{\sqrt{y}}=\dfrac{5x}{\sqrt{y}} \end{cases}$

Giải

Điều kiện :$y>0$
Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$3x^2y-(5x^2+2y-1)x\sqrt{y}+5x^2+2y-4=0, (1)$$

$\Delta_{x\sqrt{y}}=(5x^2+2y-1)^2-12(5x^2+2y-4)=(5x^2+2y-1)^2-12(5x^2+2y-1)+36=(5x^2+2y-7)^2$

Do đó (1) $\Leftrightarrow \left(3x\sqrt{y}-5x^2-2y+4\right)\left(x\sqrt{y}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x\sqrt{y}-5x^2-2y+4=0 & (2) \\ x\sqrt{y}-1=0 & (3) \end{array}\right.$
Phương trình thứ hai của hệ tương đương

$$4x\sqrt{y}+5y+6x^2+10=5x, (4)$$

Thực hiện 4.(2) − 3.(4) được $-38x^2+15x-14=23y>0$ vô lý vì $\Delta_x=-1903<0$
Xét (3) $\Leftrightarrow \sqrt{y}=\frac{1}{x}$ thay vào (4), được $f(x)=6x^4-5x^3+14x^2+5=0$
Dễ thấy phương trình này vô nghiệm.
Vậy hệ đã cho vô nghiệm □

Câu 395 $\begin{cases} \sqrt{2x+1}-\sqrt{2y+1}=y-x \\ 16x^2y^2+5=6\sqrt[3]{4x^2y+x} \end{cases}$

Giải

Nhiều người nhận xét câu này chẳng có gì đặc biệt khi từ phương trình (1) đã rút ra được $x=y$ rồi. Tuy nhiên cái hay ở sau

Điều kiện : $x,y\geq \dfrac{1}{2}$

Phương trình thứ nhất tương đương

$$(1)\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}}+1\right)=0\Leftrightarrow x=y$$

Thay vào (2) ta được

$$16x^4+5=6\sqrt[3]{4x^3+x}$$

Đối với hình thức hệ này đánh giá là công cụ tốt nhất. Nhẩm được nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ và ta tiến hành tách ghép phù hợp.

Để phương trình có nghiệm hiển nhiên $x>0$

Ta có

$$6\sqrt[3]{4x^3+x}=3\sqrt[3]{2.4x.\left(4x^2+1\right)}\leq 2+4x+4x^2+1$$

$$\Leftrightarrow 16x^4+5\leq 4x^2+4x+3$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2\left(2x^2+2x+1\right)\leq 0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ □

Câu 396 $\begin{cases} 3x^2-2x-5+2x\sqrt{x^2+1}=2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} \\ x^2+2y^2=2x-4y+3 \end{cases}$

Giải

Trừ hai phương trình vế với vế ta được

$$\left[\sqrt{x^2+1}+x\right]^2=\left[\sqrt{(y+1)^2+1}+y+1\right]^2$$

Dễ thấy hàm số cần xét là $f(t)=\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)^2$ và hàm này đơn điệu tăng. Từ đó suy ra $x=y+1$ thay vào (2) ta được

$$(y+1)^2+2y^2=2(y+1)-4y+3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2\Rightarrow x=-1 \\ y=\dfrac{2}{3}\Rightarrow x=\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(-2;-1),\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ □

Câu 397 $\begin{cases} 7\sqrt{16-y^2} = (x-1)(x+6) \\ (x+2)^2 + 2(y-4)^2 = 9 \end{cases}$

Giải

Từ phương trình đầu ta có $(x-1)(x+6) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -6 \end{array}\right.$

Từ phương trình (2) ta lại có

$$(x+2)^2 \leq 9 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1$$

Vậy suy ra $x = 1$ và $y = 4$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 4)\square$

Câu 398 $\begin{cases} \sqrt{x+2y} - \sqrt{x-2y} = 2 \\ \sqrt[3]{x+3} + \sqrt{x^2-4y^2} = 5 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq -3, x \geq 2y$
Để ý ở phương trình (2) có lượng $\sqrt{x^2-4y^2}$ sinh ra từ việc bình phương (1). Vậy bình phương (1) suy ra

$$x - 2 = \sqrt{x^2-4y^2}$$

Thay xuống dưới ta được

$$\sqrt[3]{x+3} + x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow y = \pm 2$$

Chú ý đến điều kiện bình phương (1) ta loại $y = -2$
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (5; 2)\square$

Câu 399 $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 + x + \dfrac{y^3}{x+1} = 2 \\ 2x + y + \dfrac{y^2}{x+1} = 2 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} (x+y+1)(\dfrac{y^2}{x+1} + x) = 2 \\ (x+y+1) + (\dfrac{y^2}{x+1} + x) = 3 \end{cases}$$

Đặt $x+y+1=a,\ \dfrac{y^2}{x+1}+x=b$ ta có hệ mới

$$\begin{cases} ab=2 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1,b=2 \\ a=2,b=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=0 \\ \dfrac{y^2}{x+1}+x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=1 \\ \dfrac{y^2}{x+1}+x=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,y=1 \\ x=1,y=0 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{4},y=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{4},y=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(0;1),(1;0),\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{4};\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}\right),\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4};\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)$ □

Câu 400 $\begin{cases} 2y+2+x\left(y^2+2y\right)=0 \\ y+1-\dfrac{x^3-3x}{3x^2-1}=0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x\neq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Đặt $y+1=a$ thì hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} 2a+x(a^2-1) \\ a=\dfrac{x^3-3x}{3x^2-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2a}{1-a^2} \\ a=\dfrac{x^3-3x}{3x^2-1} \end{cases}$$

Đến đây hẳn phải nhìn thấy tư tưởng lượng giác hóa rồi nhỉ ? Xin nhường lại cho bạn đọc làm nốt.

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(0;-1),\left(\pm\sqrt{5-2\sqrt{5}};-1\mp\left(2\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}\right)\right)$
$\left(\pm\sqrt{5-2\sqrt{5}};-1\mp\left(2\sqrt{5-2\sqrt{5}}-\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}\right)\right)$ □

Câu 401 $\begin{cases} x^2+1-y\sqrt{x+y}=y \\ x^2\left(x+y-2\right)+x-2=5y \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x+y\geq 0$

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ. Hệ đã cho viết lại thành

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}-\sqrt{x+y}=1 \\ \dfrac{x^2+1}{y}(x+y-2)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a(b^2-2)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x^2+1=3y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3-\sqrt{53}}{2}, y=\dfrac{11+\sqrt{53}}{2} \\ x=\dfrac{\sqrt{53}-3}{2}, y=\dfrac{11-\sqrt{53}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{-3-\sqrt{53}}{2};\dfrac{11+\sqrt{53}}{2}\right),\left(\dfrac{\sqrt{53}-3}{2};\dfrac{11-\sqrt{53}}{2}\right)$ $\square$

Câu 402 $\begin{cases} x^2+y^2=3x-4y+1 \\ 3x^2(x^2+9)-2y^2(y^2+9)=18(x^3+y^3)+2y^2(7-y)+3 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x(x-3)+y(y+4)=1 \\ 3x^2(x-3)^2-2y^2(y+4)^2=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 3a^2-2b^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1,b=0 \\ a=-5,b=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}, y=0\vee 4 \\ VN \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2};0\right),\left(\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2};4\right)$ $\square$

Câu 403 $\begin{cases} 8\sqrt{3y+4}=-x+\dfrac{85}{2} \\ 16(x^3-y)+6x(3-4x)=16y+21+6\sqrt[3]{y+1} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y\geq -\dfrac{4}{3}$

Phương trình thứ 2 tương đương

$$\Leftrightarrow 16x^3-24x^2+18x=16y+6\sqrt[3]{y+1} \Leftrightarrow 16x^3-24x^2+18x+16=16(x+1)+6\sqrt[3]{y+1}$$

Nhìn vào hình thức này có lẽ sẽ xét hàm. Tuy nhiên vế phải có dạng khuyết thiếu bậc 2 trong khi vế trái lại có. Vậy ta đổi biến $x=u-\dfrac{b}{3a}=u+\dfrac{1}{2}$, $\quad t=\sqrt[3]{y+1}$. Như vậy phương trình (2) sẽ là

$$16u^3+16u=16t^3+16t \Leftrightarrow u=t \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}+\sqrt[3]{y+1}$$

Thay lên (1) ta được

$$8\sqrt{3y+4}+\sqrt[3]{y+1}=42 \Leftrightarrow y=7 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = \left(\frac{5}{2};7\right)$ $\square$

Câu 404 $\begin{cases} \sqrt{2x-1} - y\left(1+2\sqrt{2x-1}\right) = -8 \\ y^2 + y\sqrt{2y-1-4x} - 2x + y = 13 \end{cases}$

Giải

Đây là một bài hệ khá khó, tuy nhiên anh Nguyễn Xuân Nam, một người bạn của tôi trên facebook đã chơi nó bằng 5 cách khác nhau. Tôi xin giới thiệu cho bạn đọc cách là dễ hiểu nhất đối với bài này. Đúng như lời ảnh nhận xét : đây là một ví dụ cho câu nói "Cần cù bù thông minh"

Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{3}{2}$

Đặt $\sqrt{2x-1} = a \geq 0$. Từ phương trình (1) ta rút ra

$$y = \frac{a+8}{1+2a}$$

Thay vào phương trình (2) ta được

$$\left(\frac{a+8}{1+2a}\right)^2 + \left(\frac{a+8}{1+2a}\right)\sqrt{\frac{-4a^3-2a^2-4a+13}{1+2a}} - 2a^2 + \frac{a+8}{1+2a} = 14$$

Đặt vế trái là $f(a)$. Ta có

$$f'(a) = \frac{-30(a+8)(2a+1)}{(2a+1)^4} - \frac{15}{(1+2a)^2}\cdot\sqrt{\frac{-4a^3-2a^2-4a+13}{1+2a}} + \left(\frac{a+8}{1+2a}\right)\cdot\frac{\frac{-16a^3-16a^2-4a-30}{(1+2a)^2}}{2.\sqrt{\frac{-4a^3-2a^2-4a+13}{1+2a}}} - 4a - \frac{15}{(1+2a)^2} < 0$$

Vậy phương trình này có nghiệm duy nhất $a = 1 \Rightarrow x = 1, y = 2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (1;2)$ $\square$

Câu 405 $\begin{cases} 2\sqrt{2x-3y} + \sqrt{5-x+y} = 7 \\ 3\sqrt{5-x+y} - \sqrt{2x-y-3} = 1 \end{cases}$

Giải

Bài toán trên xuất hiện 3 căn thức khó chịu. Nếu ta đặt chúng lần lượt là $a,b,c > 0$ thì đã có 2 phương trình, cần tìm thêm một phương trình nữa biểu diễn mối quan hệ giữa 3 ẩn.

Đặt $\sqrt{2x-3y} = a, \sqrt{2x-y-3} = b, \sqrt{5-x+y} = c, \quad a,b,c > 0$ hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2a + c = 7 \\ 3c - b = 1 \\ a^2 + b^2 + 4c^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3, b = 2, c = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 2x - y - 3 = 4 \\ 5 - x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3, y = -1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (3;-1)$ $\square$

Câu 406 $\begin{cases} y^2 = \dfrac{x^5+x^4+1}{x^2+x+1} \\ x^2+y^2-3xy-x+3y-1=0 \end{cases}$

Giải

Phương trình (2) Δ không đẹp. Sẽ phải khai thác từ (1). Với hình thức thế kia có lẽ vế phải sẽ rút gọn được. Vì mẫu không thể phân tích được nên dự đoán trên tử sẽ có nhân tử x^2+x+1. Tiến hành nhóm ta sẽ được $x^5+x^4+1 = (x^3-x+1)(x^2+x+1)$
Như vậy hệ sẽ là

$$\begin{cases} y^2 = x^3-x+1 \\ x^2+y^2-3xy-x+3y-1=0 \end{cases}$$

Thay y^2 từ (1) xuống dưới ta được

$$(x-1)(x^2+2x-3y)=0$$

Với $x=1 \Rightarrow y=\pm 1$ Với $y=\dfrac{x^2+2x}{3}$ thay vào (1) ta giải ra

$$\left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=5 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm :
$(x;y) = (1;1), (1;-1), (3;5), \left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}; \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right), \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$ $\square$

Câu 407 $\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt[4]{y^2-2y+2} = 2 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{y+3} = 3 \end{cases}$

Giải

Phương trình thứ nhất tương đương

$$\sqrt{(x-1)^2+1} + \sqrt[4]{(y-1)^2+1} = 2$$

Dễ thấy $VT \geq VP$.
Đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$ thay vào (1) thỏa mãn.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1)$ $\square$

Câu 408 $\begin{cases} \sqrt[3]{2x-y}+\sqrt[3]{3x-2y}=2 \\ 2\sqrt[3]{3x-2y}+5x+y=8 \end{cases}$

Giải

Đặt $a=\sqrt[3]{2x-y}, b=\sqrt[3]{3x-2y}$
Sử dụng đồng nhất sau

$$5x+y=13(2x-y)-7(3x-2y)$$

Vậy hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2b-7b^3+13a^3=8 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x-2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(1;1)\square$

Câu 409 $\begin{cases} (2x+1)\left(2+\sqrt{4x^2+4x+4}\right)+3y\left(2+\sqrt{9y^2+3}\right)=0 \\ 4x^3-3y+3\sqrt{1-3y}=-5 \end{cases}$

Giải

Để ý phương trình (1) 2 biến x,y hoàn toàn tách rời nhau và ta hi vọng nó sẽ ra được điều gì đó, với hình thức này có lẽ là hàm số. Phương trình (1) viết lại thành

$$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}=-3y(2+\sqrt{9y^2+3})$$

Chưa phải cùng 1 dạng hàm. Nhưng để ý $9y^2=(-3y)^2$. Khi đó 2 vế đều có dạng

$$f(t)=2t+t\sqrt{t^2+3}$$

Hàm này đơn điệu tăng, từ đó ta suy ra $2x+1=-3y$ thay vào (2) ta được

$$4x^3+2x+3\sqrt{2x+2}=-6 \Leftrightarrow x=-1$$

Vì vế trái đồng biến nên phương trình này có nghiệm duy nhất.
Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)\square$

Câu 410 $\begin{cases} 27y^3-3x^2+9y=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{3y}=\sqrt[4]{72\left(\dfrac{x^2}{9}+y^2\right)} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x,y\geq 0$
Để ý phương trình thứ (2)

$$(\sqrt{x}+\sqrt{3y})^4 \leq 4(x+3y)^2 \leq 8(x^2+9y^2) = VP$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\sqrt{x} = \sqrt{3y} \Leftrightarrow x = 3y.$$

Thay lên (1) ta được

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(1; \frac{1}{3}\right)$ $\square$

Rễ của sự học tập thì đắng, quả của sự học tập thì ngọt.